4

KNOPP: TEORÍA DE FUNCIONES

MANUALES TÉCNICOS LABOR

Manuales Técnicos Labor

Objeto inmediato de estos Manuales es divulgar los elementos esenciales de la Técnica en forma clara y concisa, a la vez que con rigor científico absoluto. Son, por tal razón, los libros más indicados para los estudiantes y profesionales que deseen informarse con rapidez y seguridad en los múltiples casos que la Técnica depara.

El método seguido en la exposición de los

MANUALES TÉCNICOS LABOR

tiende a obtener siempre el máximo rendimiento educativo, a cuyo objeto contribuyen igualmente las ilustraciones y diagramas que en abundante número se emplean en ellos, lo que los convierte en libros de inestimable valor e inmediata utilidad.

15.000

MANUALES TÉCNICOS LABOR

BIBLIOTECA CIENTÍFICA Y PROFESIONAL

MANUALES PUBLICADOS

1. **Tecnología mecánica,** por J. Serrat y Bonastre. 467 páginas y 308 ilustraciones. *(8.ª edición. 3.ª reimpresión).*
2. **Aritmética y Álgebra,** por P. Crantz. 347 páginas y 30 figuras. *(6.ª edición).*
3. **Trigonometría plana y esférica,** por G. Hessenberg. 176 páginas, 59 figuras y 5 tablas. *(4.ª edición. Reimpresión).*
4. **Teoría de funciones,** por K. Knopp. 290 páginas y 15 figuras. *(2.ª edición. Reimpresión).*
5. **Física teórica, I,** por J. Jäger. 290 páginas y 32 figuras. *(2.ª edición. Reimpresion).*
6. **Problemas de Física,** por G. y K. Mahler. 170 páginas. *(3.ª edición. Reimpresión).*
7. **Hormigón armado,** por H. Kayser. 219 páginas y 209 figuras. *(3.ª reimpresión).*
8. **Introducción a la Química inorgánica,** por B. Bavink. 219 páginas y 31 figuras. *(3.ª edición. Reimpresión).*
9. **Introducción a la Química general,** por B. Bavink. 181 páginas y 24 figuras. *(3.ª edición. 2.ª reimpresión).*
10. **Elementos de Hidráulica,** por Ph. Forchheimer. 184 páginas y 114 figuras. *(2.ª edición. Reimpresión).*
11. **Turbinas de vapor y turbocompresores,** por H. Baer. *(Agotado).*
12. **Construcciones en ladrillo y piedra,** por H. Walbe. 179 páginas y 302 figuras. *(2.ª edición. Reimpresión en preparación).*
13. **Estática gráfica,** por O. Henkel. 402 páginas y 218 figuras. *(4.ª edición. 2.ª reimpresión).*
14. **Fotogrametría,** por H. Lüscher. *(Agotado).*
15. **Introducción a la Química analítica,** por F. Rüseberg. 288 páginas y 19 figuras. *(2.ª edición. Reimpresión).*
16. **Geometría analítica,** por R. Fricke. 208 páginas y 96 figuras. *(3.ª edición. Reimpresión).*
17. **Introducción a la Química orgánica,** por B. Bavink. 188 páginas y 9 figuras. *(3.ª edición. (Reimpresión).*
18. **Física experimental, I,** por R. Lang. 377 páginas y 249 figuras. *(3.ª edición).*
19. **Técnica de la iluminación eléctrica,** por B. D. Aloy y Fló. 324 páginas, 160 grabados y 17 láminas. (Sec. Ingeniería, del Catálogo general).
20. **Montaje de instalaciones eléctricas de luz y fuerza,** por H. Pohl. *(Agotado).*
21. **Cálculo de probabilidades,** por O. Knopf. 230 páginas y 10 figuras. *(3.ª edición. Reimpresión).*
22. **Cinemática,** por H. Polster, 158 páginas y 76 figuras. *(2.ª edición).*
23. **Tablas y fórmulas técnicas de mecánica y electricidad aplicadas,** por W. Müller. 204 páginas y 142 figuras. *(3.ª edición. Reimpresión).*
24. **La medición en la construcción de máquinas,** por L. Zipperer. 132 páginas y 98 figuras. *(2.ª edición).*
25. **Física teórica, II,** por J. Jäger. 434 páginas y 95 figuras. *(2.ª ed.).*
26. **Metalurgia,** por E. L. Rhead. (Sec. Ingeniería, del Catálogo general).
27. **Estática,** por W. Hauber. 296 páginas y 143 figuras. *(2.ª edición. Reimpresión).*
28. **Topografía, I,** por P. Werkmeister. 350 páginas y 233 figuras. *(2.ª edición. 2.ª reimpresión).*
29. **Topografía, II,** por P. Werkmeister. 350 páginas, 61 figuras y 6 láminas y numerosos gráficos. *(2.ª edición. 2.ª reimpresión).*

30. **Ensayos de materiales**, por K. MEMMLER. 311 páginas y 88 figuras. *(3.ª edición).*
31. **Navegación aérea**, por J. M. AYMAT. 406 páginas, 186 figuras, 3 láminas y numerosos gráficos. (Sección Aviación, del Catálogo general).
32. **Trazado y construcción de carreteras**, por W. EUTING. *(Agotado).*
33. **Organización de talleres**, por J. BORRELL. 195 páginas y 13 figuras. *(2.ª edición revisada).*
34. **Materiales de construcción**, por M. FOERSTER. 366 páginas y 57 figuras. *(3.ª edición. 2.ª reimpresión).*
35. **Electroquímica, I**, por H. DANNEEL. *(Agotado).*
36. **Electroquímica, II**, por H. DANNEEL. *(Agotado).*
37. **Prácticas de Química inorgánica**, por E. H. RIESENFELD. (Sección Química, del Catálogo general).
38. **Turbinas hidráulicas**, por P. HOLL y E. TREIBER. 286 páginas y 161 figuras. *(2.ª edición en preparación).*
39. **Introducción al Análisis vectorial**, por R. GANS. 194 páginas y 40 figuras. *(2.ª edición. Reimpresión).*
40. **Electrotecnia**, por K. LAUDIEN. 564 páginas, 809 figuras y numerosos ejemplos. *(3.ª edición en preparación).*
41. **Elementos de Geometría, I**, por F. SEVERI. 269 páginas y 220 figuras. *(3.ª edición. Reimpresión).*
42. **Elementos de Geometría, II**, por F. SEVERI. 373 páginas y 144 figuras. *(3.ª edición. Reimpresión).*
43. **Dibujo de máquinas**, por R. SCHIFFNER. 300 páginas y 486 figuras, algunas de ellas en color, y 128 láminas. *(3.ª edición. Reimpresión en preparación).*
44. **Motores de gas y de aceite**, por A. KIRSCHKE. *(Agotado).*
45. **Metalografía**, por E. HEYN y O. BAUER. 266 páginas, 118 figuras, y 20 láminas con 40 microfotografías. *(2.ª edición. Reimpresión).*
46. **Calefacción y ventilación**, por J. KÖRTING. 279 páginas y 183 figuras. *(2.ª edición. Reimpresión en preparación).*
47. **La industria textil**, por M. GÜRTLER y W. KIND. 396 páginas y 112 figuras. *(2.ª reimpresión).*
48. **Matemáticas para químicos**, por J. M.ª IÑIGUEZ ALMECH. 518 páginas y 96 figuras. *(5.ª edición).*
49. **Movimientos de tierras, galerías y túneles**, por ALFRED BIRK. 219 páginas y 108 figuras. *(Agotado).*
50. **Baterías de pilas y acumuladores**, por B. D. ALOY Y FLÓ. 226 páginas, 85 figuras y 27 tablas. *(2.ª edición).*
51. **Física experimental, II**, por R. LANG-B. CABRERA. 368 páginas y 228 figuras. *(2.ª edición).*
52. **Explotación técnica de ferrocarriles**, por F. WAIS. (Sección Ingeniería, del Catálogo general).
53. **Trabajos de carpintería**, por E. VIEHWEGER. *(En preparación).*
54. **La industria molinera**, por C. ANDRAE M., 355 páginas, 257 ilustraciones y 80 tablas. *(2.ª edición).*
55. **Los presupuestos en la construcción de máquinas**, por H. BETHMANN. 124 páginas y 63 figuras. *(Reimpresión).*
56. **Construcción de edificios industriales**, por H. SALZMANN. *(Agotado).*
57. **Análisis volumétrico**, por G. JANDER y K. F. JAHR. 299 páginas y 42 figuras.
58. **El arte de la encuadernación**, por M. MONJE. *(2.ª edición muy ampliada en prensa).*
59. **La física en fórmulas**, por K. MAHLER. 228 páginas y 74 figuras.
60. **La regla de cálculo**, por J. MAS PORCEL. *(Agotado).*
61. **El teletipo**, por E. RODRÍGUEZ. 352 páginas y 170 figuras.
62. **Manual del proyectista textil**, por F. GURINA. 243 páginas.
63. **Manual del plantador de jardines**, por N. CLARASÓ. 258 páginas, 85 figuras y 8 láminas.
64. **Soluciones a los Problemas de Física de Mahler**, por J. MIR. 353 páginas y 23 figuras. *(Reimpresión).*

Manuales Técnicos Labor

N.º 4

Teoría de funciones

Manuel Alberto del Castillo

MANUALES TÉCNICOS LABOR

TEORÍA DE FUNCIONES

POR EL

Dr. KONRAD KNOPP

Profesor en la Universidad de Berlín

I. Fundamentos de la teoría general de las funciones analíticas

II. Aplicaciones y complementos de la teoría general

Con 15 grabados

TRADUCIDO DE LA SEGUNDA EDICIÓN ALEMANA

POR

J. G. ÁLVAREZ UDE

SEGUNDA EDICIÓN

REIMPRESIÓN

EDITORIAL LABOR, S. A.

BARCELONA - MADRID - BUENOS AIRES - RIO DE JANEIRO

MÉXICO - MONTEVIDEO

1956

Título de la obra original:
KNOPP, FUNKTIONENTHEORIE
Editada por
G. J. GÖSCHEN'SCHE VERLAGSHANDLUNG
G. M. B. H. BERLIN. LEIPZIG

ES PROPIEDAD

Primera edición : 1926
Segunda edición : 1941
1.ª reimpresión : 1946
2.ª reimpresión : 1956

PRINTED IN SPAIN

X - 7

Imprenta Elzeviriana y Librería Camí. S. A : Torres Amat, 9 - Barcelona
Reproducción offset - Grafos, S. A. - Paseo Carlos I, 157 - Barcelona

Manuel Alberto del Castillo

ÍNDICE

LIBRO I

Fundamentos de la teoría general de las funciones analíticas

PRIMERA PARTE

Conceptos fundamentales

Págs.

Cap. I. Conjuntos de puntos en el plano.
§ 1. Punto y número 11
§ 2. Conjuntos de puntos y de números 14
§ 3. El axioma de continuidad de los números reales.. 16
§ 4. Conjuntos de puntos sobre una recta. Sus extremos superior e inferior 19
§ 5. Puntos de acumulación. Límites superior e inferior. Límite 21
§ 6. Conjuntos de puntos en el plano 27
§ 7. Trayectorias y recintos 33

Cap. II. Funciones de una variable compleja.
§ 8. Concepto de la función más general (uniforme) de una variable compleja 37
§ 9. Continuidad 39
§ 10. Diferenciabilidad 42

SEGUNDA PARTE

Integrales

Cap. III. Integral de una función continua.
§ 11. Denfinición de la integral definida..... 48
§ 12. Demostración de la existencia de la integral.... 50
§ 13. Cálculo de las integrales definidas 55
§ 14. Primeras propiedades de las integrales..... 61

Cap. IV. Teorema de la integral de Cauchy.
§ 15. Formulación del teorema 64
§ 16. Demostración del teorema fundamental 66
§ 17. Consecuencias sencillas y generalizaciones 72

Págs.

Cap. V. Fórmulas de las integrales de Cauchy.
§ 18. Fórmula fundamental 78
§ 19. Derivadas de las integrales 79

TERCERA PARTE

Series y desarrollos en serie de las funciones analíticas

Cap VI. Series de términos complejos variables.
§ 20. Campo de convergencia 85
§ 21. Convergencia uniforme..... 90
§ 22. Series uniformemente convergentes de funciones analíticas 93

Cap. VII. Desarrollo de funciones analíticas en series de potencias.
§ 23. Demostración de la posibilidad del desarrollo 99
§ 24. Consecuencias 104

Cap. VIII. Prolongación analítica y definición completa de la función analítica.
§ 25. El principio de la prolongación analítica 113
§ 26. Las funciones llamadas elementales 118
§ 27. Prolongación por medio de series potenciales y definición completa de función analítica 119
§ 28. Ejemplos de funciones multiformes 123

Cap. IX. Funciones trascendentes enteras.
§ 29. Definición..... 130
§ 30. Comportamiento para valores muy grandes de $|z|$. 131

CUARTA PARTE

De los puntos singulares

Cap. X. Desarrollo en serie de Laurent.
§ 31. El desarrollo 136
§ 32. Aclaraciones y ejemplos 139

Cap. XI. Clasificación de los puntos singulares.
§ 33. Puntos singulares esenciales y evitables o polos. 142
§ 34. Comportamiento de las funciones analíticas en el infinito..... 146
§ 35. Teorema de los residuos 150
§ 36. Las funciones racionales 154

LIBRO II

Aplicaciones y complementos de la Teoría general

Introducción 161

PRIMERA PARTE

Funciones uniformes

Cap. I. Funciones enteras.
§ 1. El teorema del producto de Weierstrass..... 165
§ 2. Demostración del teorema del producto de Weierstrass 171
§ 3. Ejemplos de productos de Weierstrass 184

Cap. II. Funciones meromorfas.
§ 4. El teorema de Mittag-Leffler 193
§ 5. Demostración del teorema de Mittag-Leffler.... 197
§ 6. Ejemplos de aplicación del teorema de Mittag-Leffler 200

Cap. III. Funciones periódicas.
§ 7. Períodos de las funciones analíticas 212
§ 8. Funciones simplemente periódicas..... 218
§ 9. Funciones doblemente periódicas. Funciones elípticas 225

SEGUNDA PARTE

Funciones multiformes

Cap. IV. Raíces y logaritmos.
§ 10. Preliminares acerca de las funciones multiformes y las superficies de Riemann 242
§ 11. Las superficies de Riemann de $\sqrt[p]{z}$ y $\log z$ 247
§ 12. Las superficies de Riemann de las funciones $w = \sqrt{(z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_k)}$ 256

Cap. V. Funciones algebraicas.
§ 13. Planteamiento del problema 261
§ 14. Carácter analítico de las raíces en pequeño..... 263
§ 15. La función algebraica 267

Cap. VI. La figura analítica.
§ 16. La función analítica monógena 275
§ 17. La superficie de Riemann 278
§ 18. La figura analítica..... 281

Indice alfabético..... 287

Manuel Alberto del Castillo

BIBLIOGRAFÍA

Las memorias de CAUCHY, RIEMANN y WEIERSTRASS, que constituyen el fundamento de la Teoría de funciones, se encuentran en las colecciones de sus obras completas:

Œuvres complètes d'AUGUSTIN CAUCHY. París (Gauthier-Villars), 1882 y 1911.
BERNHARD RIEMANN, Gesammelte mathematische Werke, 2.ª ed. Leipzig (B. G. Teubner), 1892.
KARL WEIERSTRASS, Mathematische Werke. Berlín, 1894-1915.

Entre las exposiciones sistemáticas de la Teoría de funciones, merecen ser citados:

E. BOREL, Leçons sur la théorie des fonctions. París, 1898.
H. DURÈGE, Elemente der Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen, 5.ª ed. bearb. von L. MAURER. Leipzig, 1906.
R. FRICKE, Analytisch-funktionentheoretische Vorlesungen. Leipzig, 1900.
E. GOURSAT, Cours d'analyse mathématique, vol. II, 2.ª ed. París, 1911. (Deutsche Ausgabe in Vorbereitung.)
J. HADAMARD, La série de Taylor et son prolongement analytique (Coll. Scientia). París, 1901.
C. JORDAN, Cours d'analyse, vol. I, 3.ª ed. París, 1909.
G. KOWALEWSKI, Die komplexen Veränderlichen und ihre Funktionen. Leipzig, 1911.
N. NIELSEN, Elemente der Funktionentheorie. Leipzig, 1911.
W. F. OSGOOD, Lehrbuch der Funktionentheorie, vol. I, 2.ª ed. Leipzig, 1912.
E. PICARD, Traité d'analyse, vol. II, 2.ª ed. París, 1905.
O. STOLZ und J. A. GMEINER, Einleitung in die Funktionentheorie, 2.ª ed. Leipzig, 1905.
G. VIVANTI, Teoría de las funciones uniformes analíticas. (Hay una traducción alemana de A. GUTZMER. Leipzig, 1906.)
Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Leipzig, 1898 y sig., tomo II, 2.

N. del T. — Posteriormente a la publicación de la segunda edición alemana del presente tomo, han aparecido algunas obras notables de Teoría de funciones, entre las cuales figuran las alemanas:

BIEBERBACH, Lehrbuch der Funktionentheorie, tomo I. Leipzig, 1920.
HURWITZ, Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen, en un tomo con
COURANT, Geometrische Funktionentheorie. Berlín, 1922.

KNOPP, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, 2.ª ed. Berlín, 1924.
PRINGSHEIM, Vorlesungen über Zahlen—und Funktionenlehre (publicados tres volúmenes). Leipzig, 1921.
Y la española de
REY PASTOR, Resumen de la teoría de las funciones analíticas, etc. Buenos Aires, 1920.

Además de las obras citadas deben mencionarse como tratados de funciones particulares:

P. APELL und E. GOURSAT, Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales. París, 1895.
E. BOREL, Leçons sur les fonctions entières. París, 1900.
E. BOREL, Leçons sur les fonctions méromorphes. Paris, 1903.
H. BURKHARDT, Funktionentheoretische Vorlesungen. Zweiter Teil: Elliptische Funktionen. 2.ª ed. Leipzig, 1906.
H. DURÈGE, Theorie der elliptischen Funktionen, 5.ª ed. Bearb. von L. MAURER. Leipzig, 1908.
R. FRICKE, Die elliptischen Funktionen und ihre Anwendungen. Erster Teil. Leipzig, 1916.
K. HENSEL und G. LANDSBERG, Vorlesungen über algebraische Funktionen und ihre Integrale. Leipzig 1901.
C. JORDAN, Cours d'analyse, vol. II, 3.ª ed. París, 1913.

LIBRO I

Fundamentos de la teoría general de las funciones analíticas

PRIMERA PARTE

CONCEPTOS FUNDAMENTALES

CAPÍTULO PRIMERO

CONJUNTOS DE PUNTOS EN EL PLANO

§ 1. Punto y número

Suponemos al lector familiarizado con los números complejos ordinarios, y, por consiguiente, que sabe operar con ellos y conoce su representación unívoca por medio de los puntos de un plano referidos a un sistema de ejes cartesianos rectangulares, haciendo corresponder al número complejo $x + iy$ (x e y reales) el punto cuya abscisa es la parte real, x, de z, y cuya ordenada es la parte imaginaria, y, de z [1]. Según este convenio, corresponde, en efecto, a cada número complejo un punto determinado y, recíprocamente, a cada punto un número también determinado. Las expresiones *punto* y *número* pueden, pues, considerarse como completamente equivalentes, sin temor a confusiones y, en consecuencia, podremos hablar en adelante, por ejemplo, del «punto $i\sqrt{3}$», o de la «distancia entre dos números», o del «triángulo de vértices z_1, z_2, z_3».

[1] La notación corriente es $x = R(z)$, $y = J(z) = R\left(\frac{z}{i}\right)$. — A veces, se designa como parte imaginaria iy (no y solamente), pero se advierte en seguida el cambio de denominación, de modo que nunca da origen a error.

De esta equivalencia entre punto y número se deducen inmediatamente las siguientes sencillas consecuencias, que importa hacer observar:

a) La distancia del origen a un punto z es $= |z|$; la distancia entre dos puntos z_1 y z_2 es $= |z_1 - z_2| = |z_2 - z_1|$ y siempre se verifica:

$$|z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad \text{y} \quad |z_1 \pm z_2| \geq |z_1| - |z_2|.$$

b) La ecuación $|z| = 1$ caracteriza la circunferencia del círculo de radio 1 y centro **0** (el llamado **círculo unidad**); es decir, todos los números z, tales que es $|z| = 1$, son puntos de esta circunferencia, y recíprocamente.

c) La inecuación $|z - z_0| < r$ caracteriza, de la misma manera, la superficie del círculo de radio r y centro z_0, excluída su circunferencia (su *contorno*).

d) Análogamente, la expresión $|z + 4i| \leq 3$ determina la superficie del círculo de radio 3 y centro $-4i$, incluyendo a su circunferencia.

e) La expresión $|z - z_1| > R$ caracteriza la parte del plano z exterior al círculo de radio R y centro z_1.

f) La desigualdad $R(z) > 0$ caracteriza el *semiplano «derecho»*, es decir, la parte del plano z que, suponiendo orientados los ejes como ordinariamente, queda a la derecha del llamado eje imaginario.

g) La expresión $0 < r < |z - z_0| < R$ determina el interior de la corona circular comprendida entre las circunferencias de radios r y R y centro z_0.

h) La expresión $\zeta + z'$, en la que ζ es fijo y z' arbitrario, sin otra limitación que la de ser $|z'| < \varepsilon$, determina, como **c)**, un círculo de centro ζ y radio ε, o, como más brevemente suele decirse, *un entorno* del punto ζ; pues poniendo $\zeta + z' = z$, deberá ser:

$$|z'| = |z - \zeta| < \varepsilon.$$

La parte de plano exterior a un círculo [véase **e)**] se llama también *«el entorno del punto del infinito»*. Esta denominación, es decir, el considerar el *«infinito»* como un punto, *el punto* $z = \infty$, se justifica por la siguiente consideración:

La ecuación

$$z' = \frac{1}{z} \quad \text{o} \quad z = \frac{1}{z'}$$

hace corresponder a cada punto, z, exterior al círculo unidad (es decir, a todo $|z| > 1$) un punto determinado, z', interior al mismo círculo, puesto que para $|z| > 1$ es $|z'| = \frac{1}{|z|} < 1$. De esta manera corresponde, recíprocamente, a cada punto, z', interior al círculo, un punto igualmente determinado, z, exterior. Ahora bien, como a los puntos z' muy próximos al origen corresponden puntos z muy alejados [1] y a toda aproximación de z' al punto cero corresponde un alejamiento de z hacia el infinito, se dice: al punto $z' = 0$ corresponde *el punto* $z = \infty$, y recíprocamente. Esto debe considerarse, sin embargo, simplemente como un convenio, cuyas ventajas se aprecian frecuentemente en el curso de la teoría de funciones [2].

En lo que sigue, y mientras expresamente no se advierta lo contrario, *nunca* representaremos, sin embargo, por la letra z el punto ∞.

---

[1] Pues, cuando $|z'|$ es muy pequeño, $|z| = 1 : |z'|$ es muy grande.

[2] Se facilita esta representación, imaginando el plano cerrado en el infinito. Para ello se considera una esfera tangente al plano en el punto cero (polo sur) y se proyectan los puntos del plano sobre la esfera desde el polo norte (proyección o representación *estereográfica*) y se imagina encorvado el plano para adaptarse a la esfera, confundiéndose cada punto con su proyección; con lo cual los puntos alejados se colocarán próximos al polo norte. Las semirrectas del plano que parten del origen se confunden entonces con los meridianos: el plano queda así cerrado «en el infinito», y el polo norte es el representante (completamente real en la esfera) «del punto ∞» del plano z. Cuando se procede de esta manera, los números complejos están representados por los puntos de una esfera, que entonces se llama *esfera numérica*.

Problema.—¿Qué *arcos* quedan determinados por las relaciones

$$\alpha)\ \left|\frac{z-1}{z+1}\right| = 1, \qquad \beta)\ \left|\frac{z-1}{z+1}\right| = 2, \qquad \gamma)\ \left|\frac{z}{z+1}\right| = a\ (>0),$$

$$\delta)\ R(z^2) = 4, \qquad \varepsilon)\ J(z^2) = 4, \qquad \zeta)\ |z^2 - 1| = a\ (>0).$$

¿Qué *áreas* están caracterizadas por estas mismas relaciones cuando se substituyen los signos de igualdad por los $<, >, \leqq$ ó $\geqq$?

§ 2. Conjuntos de puntos y de números

Cuando, atendiendo a cualquier circunstancia, se escoge de entre la totalidad de los números una parte finita o infinita, se dice que la parte separada forma un *conjunto de números*, y los puntos correspondientes un *conjunto de puntos*. Las expresiones «conjunto de números» y «conjunto de puntos» pueden, pues, también, ser consideradas como completamente equivalentes. Un conjunto M de esta naturaleza se considera definido o dado cuando su determinación (la circunstancia que ha servido de base para la elección) es tal que permite asegurar que cada punto forzosamente pertenece o no pertenece al conjunto.

Ejemplos sencillos de estos conjuntos son:

M_1: todos los números $z = x + iy$, en los que x e y son enteros. Los puntos de este conjunto, atendida su posición, se llaman *puntos reticulares* [1] del plano.

M_2: todos los números reales.

M_3: los números $\frac{1}{n}$, siendo $n = 1, 2, 3, \ldots$, es decir, los números $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$

M_4: los números $1 \pm \frac{1}{n}$, siendo $n = 1, 2, 3, \ldots$

[1] No hallamos traducción más adecuada de la palabra «Gitterpunkte» con que se designan los puntos de intersección de las paralelas a los ejes cuyas distancias a éstos se expresan por números enteros. (*N. del T.*)

M_5: los números $\frac{1+i}{n}$, siendo $n = 1, 2, 3, \ldots$

M_6: los números $z = \frac{1}{m} + \frac{i}{n}$, siendo m y n números enteros y positivos cualesquiera.

M_7: todos los números $z = x + iy$, siendo x e y números racionales y $1 \leqq |z| \leqq 2$ (estos números pertenecen a una corona circular).

$M_8, M_9, \ldots M_{12}$: Las relaciones **b)** a **f)** definen conjuntos de números, etc.

Si un conjunto es tal que todos los números que contiene (sus «*elementos*») pueden ser numerados, es decir, pueden ser designados como 1.°, 2.°, 3.°, ..., n—simo, ... de una sucesión, o como $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n, \ldots$ y, por consiguiente, que a cada uno de ellos se le puede asignar un lugar determinado, se dice que el conjunto es *numerable*.

M_3 y M_6 son, evidentemente, numerables; también lo es M_4, cosa que se ve inmediatamente ordenando sus elementos de esta manera:

$$0,\ 2,\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{4}{3}, \ldots,\ 1 - \frac{1}{n},\ 1 + \frac{1}{n} \ldots$$

Asimismo es numerable M_1, lo cual se reconoce fácilmente dibujando los cuadrados cuyo centro es el punto cero y cuyos lados son paralelos a los ejes y tienen longitudes 2, 4, 6, 8, ... Se obtiene, entonces, la numeración buscada, comenzando en el punto cero y numerando los vértices de los sucesivos cuadrados, comenzando para cada uno, por ejemplo, en el vértice situado en la parte positiva del eje real y recorriendo a partir de él el contorno del cuadrado en el sentido positivo (es decir, el contrario al del movimiento de las agujas de un reloj). La sucesión así obtenida para los puntos reticulares comienza con

$$0,\ 1,\ 1+i,\ i,\ -1+i,\ -1,\ -1-i,\ -i,$$
$$1-i,\ 2,\ 2+i,\ 2+2i, \ldots$$

Evidentemente, a cada punto reticular corresponde así un lugar determinado en la sucesión. Análogamente se demuestra que M_6 es numerable.

El conjunto de todas las fracciones racionales (irreducibles) $\frac{p}{q}$ es también numerable, como se ve, simplemente, observando que la fracción $\frac{p}{q}$, cuyo

numerador se puede suponer siempre positivo, determina el número reticular $p + iq$. Este resultado parece paradójico, porque no es posible ordenar las fracciones consideradas atendiendo a sus magnitudes, puesto que entre dos números racionales (reales) cualesquiera se pueden intercalar otros de la misma naturaleza en número arbitrario.

Por el contrario, el conjunto de todos los números de una línea o de un área no es numerable; propiedad que nos limitamos a enunciar sin detenernos a demostrarla. Según ella, los conjuntos M_2 y $M_8, M_9, \ldots, M_{12}$ no son numerables.

Antes de seguir adelante, necesitamos aclarar algunos puntos fundamentales de la teoría de los números reales.

Problema.— Los conjuntos M_6 y M_7 son numerables. Enumerar sus elementos (es decir, ordenar todos sus puntos como 1.°, 2.°, ...).

§ 3. El axioma de continuidad de los números reales

Suponemos también conocida del lector la teoría del número real; sin embargo, atendiendo a la importancia fundamental que para sucesivas investigaciones tiene el llamado axioma de continuidad, vamos a recordarlo y precisar bien su contenido. Este principio, que, según la manera de exponer la teoría del número real, se considera como axioma (por tanto, sin demostración) o como teorema que se deduce de otros axiomas (equivalentes, en el fondo, a él), corresponde en Aritmética al de continuidad de la recta, y se llama, por esto, según queda indicado, axioma de continuidad de los números reales.

Consideremos dividido el conjunto de todos los números reales (de todos los puntos de una recta) en dos grupos o *clases*, A y B, de tal manera que:

1.° en las dos clases existan números,

2.° todo número real pertenezca a una u otra de las dos clases A y B,

Manuel Alberto del Castillo

3.° todo número a, de la clase A, sea menor que cada uno b, de la clase B.

Por ejemplo, si formamos la clase A con todos los números a tales que es $a^3 \leq 4$ y la B con todos aquellos b tales que es $b^3 > 4$, se obtiene una clasificación de la especie indicada. Otros ejemplos de divisiones de esta naturaleza se presentarán con gran frecuencia más adelante.

De la condición 3.ª se deduce inmediatamente: Si a pertenece a A y es $a' < a$, también a' pertenece a A; y si b pertenece a B, también pertenece a B todo $b' > b$.

Obtenida una clasificación de la naturaleza indicada, o, como de ordinario se dice, una **cortadura de Dedekind** en el campo de los números reales, se verifica el siguiente

Teorema fundamental: *Una cortadura de Dedekind en el campo de los números reales define siempre un número real, y sólo uno,* s (*el «número de separación» o «frontera»*), tal que es todo $a \leq s$ y todo $b \geq s$.

Intuitivamente, esta proposición puede expresarse así: Si imaginamos coloreados todos los puntos de una recta, los unos de blanco (clase A) y los otros de azul (clase B), de tal manera que (1) existen realmente los dos colores, (2) todo punto está coloreado y (3) cada punto blanco está a la izquierda de cada uno de los azules, los dos colores estarán en contacto en un cierto lugar, a la izquierda del cual todos los puntos serán blancos y a la derecha todos azules. El contenido esencial del principio que nos ocupa es que en aquel lugar hay realmente un punto, o que siempre puede designársele por medio de un número real.

El elemento de separación, s, puede pertenecer a una u otra de ambas clases A o B, según el criterio que haya presidido la clasificación; todo número menor que s pertenece necesariamente a la clase A, y todos los mayores que s, a la B.

De este principio se deduce inmediatamente otro, que no difiere esencialmente de él, pero cuya aplicación es de uso muy frecuente:

Sea $J_1, J_2, \ldots, J_n, \ldots$ una sucesión de intervalos tales que cada uno está contenido en el anterior (por consiguiente, que cada uno contiene a todos los siguientes) y que sus longitudes $l_1, l_2, \ldots, l_n, \ldots$ decrezcan al crecer n, de modo que puedan llegar a ser tan pequeñas como se quiera [1]; diremos que tal sucesión es un *encaje de intervalos*, y para toda sucesión de esta naturaleza se verifica el llamado

Principio de encaje: *Todo encaje de intervalos determina un punto, y sólo uno, perteneciente a todos sus intervalos* [2].

Demostración: Desde luego es evidente que no pueden existir dos puntos s y s' que pertenezcan a *todos* los intervalos del encaje, porque esto exigiría que la longitud de todos los intervalos fuese, por lo menos, igual a la distancia (positiva) entre s y s', lo que está en contradicción con la condición de que l_n pueda ser menor que toda cantidad dada, para valores suficientemente grandes de n.

Designemos por a_n y b_n los extremos izquierdo y derecho, respectivamente, del intervalo J_n; según la hipótesis, es

$$a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Agruparemos ahora todos los números reales en dos clases, A y B, del siguiente modo:

Clase A: Formada por los extremos izquierdos, a_n, de todos los intervalos y por todos los puntos que estén a la izquierda de uno, por lo menos, de estos extremos;

Clase B: Formada por todos los demás puntos (entre ellos están, en particular, todos los extremos derechos, b_n).

Esta clasificación satisface a las tres condiciones de las cortaduras de Dedekind; luego define un número de separación, s, tal que siempre es $a_n \leq s \leq b_n$, y, por consiguiente, s pertenece, en efecto, a *todos* los intervalos del encaje.

(1) Más breve: las longitudes o amplitudes de los intervalos, l_n, tienden a 0.

(2) Diremos que este punto está *definido* por el encaje de intervalos; éstos se repliegan, por decirlo así, sobre aquel punto. Los extremos de los intervalos se consideran como pertenecientes a éstos.

§ 4. Conjuntos de puntos sobre una recta. Sus extremos superior e inferior

Volviendo nuevamente al estudio general de los conjuntos, examinemos primero el caso en que todos los puntos del conjunto M estén sobre una recta, que, para simplificar, supondremos que es el eje llamado real; entonces, todos los puntos son reales, y recíprocamente.

M_2, M_3 y M_4 son «conjuntos de puntos reales».

Sea M uno cualquiera de tales conjuntos de puntos reales: si sobre el eje real se puede señalar un intervalo, por ejemplo, el comprendido entre $-G$ y $+G$ $(G > 0)$, tal que todos los puntos del conjunto estén contenidos en él, o, dicho de otro modo, tal que para todo elemento, x, del conjunto sea

$$-G \leq x \leq +G \quad \text{o} \quad |x| \leq G,$$

se dice que el conjunto es *acotado*. M_3 y M_4 son ejemplos de conjuntos acotados: M_2 evidentemente no es acotado. La acotación puede darse también sólo en uno u otro sentido: así, el conjunto de todos los números enteros positivos sólo está acotado por la izquierda (por abajo), y el de los negativos sólo por la derecha (por arriba), pero no son acotados en el otro sentido.

Todo número no $\left\{\begin{matrix}\text{inferior}\\ \text{superior}\end{matrix}\right.$ a ninguno del conjunto se llama *cota* $\left\{\begin{matrix}\textit{superior}\\ \textit{inferior}\end{matrix}\right.$ del conjunto; de cuya definición se sigue que toda cota superior puede ser sustituída por cualquier número mayor, y toda cota inferior por cualquier número menor que ella.

Para todo conjunto acotado por la izquierda puede demostrarse la existencia de un número, α, que tiene las dos siguientes propiedades:

1.ª A la izquierda de α no existe ningún punto del conjunto: de otro modo, si x es un punto cualquiera del conjunto, no hay *ningún* $x < \alpha$.

2.ª Existe, por lo menos, un $x < \alpha + \varepsilon$, siendo ε un número positivo tan pequeño como se quiera; de otro modo: α es una cota inferior, pero ningún número mayor que α tiene este mismo carácter, y, por consiguiente, α es la mayor de todas las cotas inferiores.

El número α se llama «**extremo inferior**» del conjunto, y la propiedad indicada se enuncia así:

Teorema 1.°: *Todo conjunto acotado inferiormente tiene un extremo inferior,* α.

Para M_4, es $\alpha = 0$; para M_5, también es $\alpha = 0$, pues ningún número de la forma $\frac{1}{n}$, $(n = 1, 2, \ldots)$, es < 0 y, por el contrario, hay por lo menos uno (y, por consiguiente, infinitos) $< 0 + \varepsilon$, por pequeño que se haya tomado ε. Este último ejemplo muestra, al mismo tiempo, que el extremo inferior de un conjunto puede no ser elemento del conjunto.

Demostración de la existencia del extremo inferior, α: Se divide el conjunto de todos los números reales en dos clases, del siguiente modo:

En la clase A se incluyen todos los números a, tales que no hay ningún $x \leq a$; y en la B, al contrario, todos los números b, tales que, *por lo menos*, existe *un* $x \leq b$.

Esta clasificación satisface a la condición 1) § 3, porque el conjunto hemos supuesto que está acotado inferiormente. La definición de las dos clases es, además, tal que también satisface a la condición 2): y, finalmente, tampoco puede ser nunca $b \leq a$, porque entonces habría por lo menos *un* x que sería $\leq b$ y, por tanto, también $\leq a$, contra la definición de la clase A.

El número que, según lo dicho en el § 3, define esta cortadura, es, por la definición dada, el extremo inferior del conjunto M. Pues, si hubiera un $x < \alpha$, sería x menor que todo número comprendido entre x y α, el cual, por ser $< \alpha$, sería uno, a, de la clase A, y, por consiguiente, habría un $x < a$, lo que es imposible. Por el contrario, cualquiera que sea ε, siempre $\alpha + \varepsilon$ pertenecerá a la clase B y, por tanto, hay por lo menos un $x < \alpha + \varepsilon$, como se quería demostrar.

Análogamente, se define como «**extremo superior**» de un conjunto el número, β, que tiene las dos siguientes propiedades:

1.ª No existe *ningún* $x > \beta$.

2.ª Existe, por lo menos, *un* $x > \beta - \varepsilon$, por pequeño que se escoja ε; y se demuestra el

Teorema 2.°: *Todo conjunto acotado superiormente tiene un extremo superior determinado,* β.

Un conjunto acotado en los dos sentidos, tiene, pues, un determinado extremo superior y otro extremo inferior, también determinado.

Nota. — Obsérvese en las demostraciones de este artículo la diferencia esencial entre los signos «$<$» y «$\leq$» y los «$>$» y «$\geq$».

§ 5. Puntos de acumulación. Límites superior e inferior. Límite

Si ξ es un número real cualquiera y ε una magnitud arbitraria positiva (pequeña), el intervalo de extremos $\xi - \varepsilon$ y $\xi + \varepsilon$ se llama un *entorno* del punto ξ (véase § 1, h).

Definición: «Se dice que un punto ξ es **punto de acumulación** de un conjunto si en *todo* entorno de ξ (por pequeño que sea) existen infinitos puntos del conjunto». El punto ξ puede ser de acumulación sin pertenecer al conjunto. En el conjunto M_3 es punto de acumulación el 0: y en el M_4 lo

es el 1. La existencia de los puntos de acumulación en los conjuntos acotados se establece por el importante

Teorema de Bolzano-Weierstrass: *Todo conjunto infinito* (es decir, compuesto de infinitos puntos) *acotado tiene un punto de acumulación, por lo menos.*

Demostración: Se divide el conjunto de todos los números reales en dos clases.

La clase A se forma con todos los números, a, tales que a su izquierda no hay ningún punto del conjunto o, a lo más, hay un número finito de ellos:

$$a \text{ lo más, un número finito de } x < a.$$

La clase B se forma con todos los números, b, tales que a su izquierda hay infinitos puntos del conjunto:

$$\text{infinitos } x < b.$$

Se ve inmediatamente que esta clasificación satisface a las tres condiciones establecidas en el § 3, y, por consiguiente, define un número de separación λ. Entonces, $\lambda - \varepsilon$ pertenece a la clase A, y a la izquierda de $\lambda - \varepsilon$ hay, a lo más, un número finito de puntos, x, del conjunto; por el contrario, $\lambda + \varepsilon$ pertenece a la clase B, y a la izquierda de $\lambda + \varepsilon$ hay infinitos puntos, x, del conjunto; por consiguiente, entre $\lambda - \varepsilon$ y $\lambda + \varepsilon$ hay infinitos x, es decir, λ es un punto de acumulación del conjunto M, lo cual demuestra el teorema.

Como a la izquierda de $\lambda - \varepsilon$ existen, a lo más, un número finito de puntos x, puede afirmarse que en esta región no puede haber ningún otro punto de acumulación, es decir, λ es el punto de acumulación situado más a la izquierda (el menor) y se llama, por esto, *extremo de acumulación inferior*, o más brevemente, **límite inferior**, y se designa por la notación *lím. inf.* o $\underline{lím.}$

De modo análogo se demuestra la existencia de un punto de acumulación situado más a la derecha (mayor) que los

demás, μ, que se llama **límite superior** (se representa por la notación *lím. sup.* o $\overline{lím.}$) y está caracterizado por las dos condiciones:

a la derecha de $\mu + \varepsilon$ hay, a lo más, un número finito de x,

a la derecha de $\mu - \varepsilon$ hay infinitos x.

Entre ambos límites existe, evidentemente, la relación $\lambda \leq \mu$. Tanto λ como μ pueden no pertenecer al conjunto y se llaman *límites principales* del conjunto M.

Para M_4 es $\lambda = \mu = 1$; para M_3 es $\lambda = \mu = 0$; para el conjunto de todos los quebrados positivos propios es $\lambda = 0$, $\mu = 1$.

Cuando el conjunto no es acotado por la izquierda, suele decirse que su límite inferior, λ (y también su extremo inferior, α), es $= -\infty$; del mismo modo, cuando el conjunto no es acotado por la derecha, se dice que es $\beta = \mu = +\infty$.

Si es $\lambda = \mu$ (pero sin ser infinitos), el punto en que coinciden se llama, simplemente, **límite** del conjunto y se representa por la notación *lím.* Este punto — que designaremos con la letra l —, es, pues, el único punto de acumulación que entonces tiene el conjunto y queda caracterizado porque tanto a la izquierda de $l - \varepsilon$ como a la derecha de $l + \varepsilon$ sólo puede haber un número finito de x, mientras que entre ambos existen, seguramente, infinitos x.

Estas definiciones y teoremas se aplican a todos los conjuntos de puntos sobre la recta, y, en particular, a los conjuntos numerables. En este caso, si se designan sus elementos en un orden arbitrario, pero determinado, por $x_1, x_2 x_3, \ldots, x_n, \ldots$ (así ordenados, se dice que M es una *sucesión de números* o *de puntos*, y en ella puede ocurrir que el mismo número se presente más de una vez), las definiciones dadas pueden expresarse así:

Extremo inferior, α, (**superior,** β): Para ningún valor del índice n se verifica:

$$x_n < \alpha \quad (> \beta);$$

y, para cualquier valor de $\varepsilon > 0$, hay, por lo menos, uno del índice n, tal que es:

$$x_n < \alpha + \varepsilon \quad (> \beta - \varepsilon).$$

$\underline{\text{Lím}}$ ($\overline{\text{lím}}$): Para cualquier valor de $\varepsilon > 0$, se verifica, a partir de un cierto lugar dependiente de la elección de ε [1]:

$$x_n > \lambda - \varepsilon \quad (< \mu + \varepsilon);$$

y para infinitos índices n, es

$$x_n > \lambda + \varepsilon \quad (> \mu - \varepsilon).$$

Lím: Para todos los índices, a partir de un cierto punto, es

$$l - \varepsilon < x_n < l + \varepsilon.$$

En los tres últimos casos considerados, se escribe así:

$$\underline{\lim}_{n \to \infty} x_n = \lambda, \quad \overline{\lim}_{n \to \infty} x_n = \mu, \quad \lim_{n \to \infty} x_n = l$$

y se lee: límite inferior, límite superior, o, simplemente, límite de x_n cuando n tiende a infinito, o para n infinito, igual a λ, μ, o l, respectivamente. En el último caso, se suele también denotar de este otro modo más breve y muy significativo:

$$x_n \to l \text{ (léase: } x_n \text{ tiende a } l)$$

—agregando, en caso necesario, para $n \to \infty$—, y se dice: La sucesión de los x_n converge hacia l o tiende al valor límite l.

Este último importantísimo caso puede también ser formulado de este otro modo: Para cualquier valor arbitrario dado a ε y para todo valor de $n \geq n_1(\varepsilon)$ se verifica:

[1] Más breve: para todo $n \geqq n_0$; o, en términos más precisos, expresando que n_0 depende del ε escogido; para todo $n \geqq n_0 = n_0(\varepsilon)$. Por lo demás, como n_0 puede ser sustituído por cualquier número mayor que él, lo mismo da, en este caso, escribir $n > n_0$ que $n \geqq n_0$.

$$l - \tfrac{1}{2}\varepsilon < x_n < l + \tfrac{1}{2}\varepsilon$$

o bien:

$$-l - \tfrac{1}{2}\varepsilon < -x_n < -l + \tfrac{1}{2}\varepsilon,$$

y, por consiguiente, para todo $p \geq 0$ y para todo $n \geq n_1(\varepsilon)$:

$$l - \tfrac{1}{2}\varepsilon < x_{n+p} < l + \tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

De estas dos últimas relaciones, se deduce, por adición:

$$-\varepsilon < x_{n+p} - x_n < +\varepsilon$$

o, más brevemente,

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon;$$

es decir, para cualquier valor arbitrariamente escogido de $\varepsilon > 0$, todos los puntos cuyos índices sean superiores a un cierto número, $n_1(\varepsilon)$, distan entre sí menos de ε.

Esta condición, necesaria para la existencia del límite, es también suficiente, es decir, se verifica el

Teorema 2.°: La condición *necesaria y suficiente* para que la sucesión $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ tenga un límite (o para que los dos números, seguramente existentes, λ y μ, sean iguales entre sí), es que, dado $\varepsilon > 0$, exista un número $n_1 = n_1(\varepsilon)$ tal que para todo valor de $n \geq n_1$ y de $p \geq 0$ sea:

$$(1) \qquad |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon.$$

Nos bastará, para demostrar el teorema, probar que la condición es suficiente.

De (1) se deduce inmediatamente que el conjunto es acotado; pues si no lo fuera, a cada lado de todo extremo habría siempre puntos del conjunto, y, por tanto, puntos cuya distancia mutua sería tan grande como se quisiera, lo cual es contrario a la hipótesis (1).

Siendo, pues, acotado el conjunto, según el teorema 1.° de este artículo, existen los puntos de acumulación λ y μ;

pero ambos tienen que coincidir, pues si fuese $\lambda < \mu$, tomando $\varepsilon = \frac{1}{3}(\mu - \lambda)$, según la definición de λ y μ siempre hay, por encima de todo índice n_1, otro, n, para el cual es:

$$x_n < \lambda + \varepsilon, \quad \text{o bien,} \quad -x_n > -\lambda - \varepsilon$$

y por encima de n todavía otro, $n + p$, tal que es

$$x_{n+p} > \mu + \varepsilon$$

y, por consiguiente, para estos dos puntos sería

$$x_{n+p} - x_n > \mu - \lambda - 2\,\varepsilon = \varepsilon,$$

contrariamente a la hipótesis (1); luego tiene que ser $\lambda = \mu$, es decir, existe

$$\lim_{n \to \infty} x_n = l.$$

Todo lo dicho en los dos artículos últimos se refiere exclusivamente a los números reales y a los conjuntos de números reales. Supondremos, pues, que el lector está ya familiarizado con lo más esencial de ello, y no insistiremos más acerca de esta materia.

Problema 1.º — Determinar los números α, β, λ, μ, y, cuando lo haya, l, así como todos los puntos de acumulación de los siguientes conjuntos:

a) $1 + (-1)^n + \dfrac{(-1)^n}{n}$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$

b) $\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n}$ para $\begin{cases} m = 1, 2, 3, \ldots \\ n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$

(véase § 2, M_6).

c) El conjunto de todos los números cuyas expresiones decimales comienzan con «0» y solamente contienen las cifras 2 y 3.

¿Cuáles de los números α, β, λ, μ y qué puntos de acumulación pertenecen al conjunto y cuáles no?

Problema 2.º — Demostrar que en el problema 1.º *c*), todo punto del conjunto es, al mismo tiempo, punto de acumulación del mismo.

Problema 3.º — Demostrar que siempre que α (ó β) no pertenece al conjunto, necesariamente es $\lambda = \alpha$, ($\mu = \beta$).

§ 6. Conjuntos de puntos en el plano

Los puntos del conjunto M_1 y de los M_6 a M_{12} del § 2 no están alineados: los llamaremos «*conjuntos planos de puntos*»; los números correspondientes no son todos reales. También en estos conjuntos se distinguen los acotados y los no acotados, partiendo de la siguiente definición:

Un conjunto se llama *acotado* cuando todos sus puntos pueden estar contenidos en una figura cerrada de dimensiones finitas (por ejemplo, un círculo); por consiguiente, cuando existe un número G, tal que para todos los puntos, z, del conjunto es:

$$|z| < G.$$

Pero si fuera de todo círculo de centro 0 (por grande que sea) hay siempre puntos del conjunto M, se dice que éste no es acotado.

Como los «conjuntos de puntos reales» son simples casos particulares de los conjuntos planos, las definiciones que acabamos de dar deben comprender las que dimos para aquéllos: al cuidado del lector dejamos el comprobar que, en efecto, es así.

Los conceptos «extremo inferior (superior)», «$\underline{\lim}$ y $\overline{\lim}$» carecen ahora de significado, porque se fundan en la distinción de derecha e izquierda. Los puntos de acumulación, ζ, se definen aquí como puntos tales que en todos sus entornos hay siempre infinitos puntos, z, del conjunto; luego, por pequeño que se tome $\varepsilon > 0$, siempre hay infinitos z, para los cuales es

$$|z - \zeta| < \varepsilon.$$

Ejemplos. — M_1 no es acotado y no tiene ningún punto de acumulación.

M_6 es acotado; los puntos $\frac{1}{m}$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ del eje real, los $\frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ y el punto 0 son puntos de acumulación.

M_7 es acotado; todos los puntos ζ, tales que es $1 \leqq |\zeta| \leqq 2$, son de acumulación del conjunto.

El conjunto M_{12} no es acotado y tiene, entre otros, el punto de acumulación i.

También aquí se verifica el

Teorema de Bolzano-Weierstrass: *Todo conjunto de puntos infinito* (es decir, compuesto de infinitos puntos) *acotado tiene un punto de acumulación, por lo menos* (1).

Demostración: Encerremos el conjunto en un cuadrado, Q_1, cuyos lados sean paralelos a los ejes coordenados, y dividamos el cuadrado por medio de paralelas a los lados en cuatro cuadrados congruentes entre sí. Uno de estos cuadrados, por lo menos, al que llamaremos Q_2 (2), tiene que contener infinitos puntos del conjunto; si con él se procede como con el Q_1, obtendremos otro cuadrado, Q_3, cuarta parte del Q_2, que contiene infinitos puntos del conjunto. Continuando indefinidamente este proceso, vemos que las proyecciones de los cuadrados Q_n sobre los ejes x e y forman encajes de intervalos que determinan los puntos de abscisa ξ y ordenada η, y el punto $\zeta = \xi + i\eta$ está contenido en todos los Q_n.

Ahora bien, al mismo tiempo que los lados de los cuadrados Q_n, tienden a cero sus diagonales, d_n; dado, pues, $\varepsilon > 0$, para

(1) Si el conjunto no es acotado, y, por tanto, fuera de todo círculo, por grande que sea, hay puntos del conjunto, en todo entorno del punto infinito hay infinitos puntos del conjunto. Por esto suele decirse que el punto ∞ es punto de acumulación de tales conjuntos. Con esta generalización, el teorema de Bolzano- Weierstrass es válido para todos los conjuntos infinitos, y no sólo para los acotados.

(2) Si hay más de uno que se encuentren en este caso, se escoge siempre, por ejemplo, el primero de ellos, supuestos ordenados como de ordinario se hace con los cuadrantes. Es de advertir, que el perímetro de cada cuadrado debe considerársele como perteneciente a éste.

Manuel Alberto del Castillo

un valor suficientemente grande del índice m, seguramente es $d_m < \varepsilon$ y, por tanto, todo el cuadrado Q_n y, con él, infinitos puntos del conjunto, pertenecen al entorno $|z - \zeta| < \varepsilon$ de ζ, es decir, ζ es un punto de acumulación del conjunto, lo cual demuestra el teorema.

En particular, si el conjunto es numerable, y $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ son sus puntos, el resultado obtenido puede formularse en estos términos: existe, por lo menos, un número ζ, tal que, dado $\varepsilon > 0$, tan pequeño como se quiera, se verifica la desigualdad

$$|z_n - \zeta| < \varepsilon \tag{3}$$

para infinitos valores del índice n.

Particularmente interesante es el caso en que ζ es el único punto de acumulación del conjunto (numerable) M; entonces, la relación (3) se verifica para todo valor de n suficientemente grande (para todo $n > n_0 = n_0(\varepsilon)$); el número ζ se llama «*límite*» del conjunto y se representa así:

$$\lim_{n \to \infty} z_n = \zeta,$$

y se dice que *la sucesión numérica* $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ *converge hacia el límite* ζ.

Lo mismo que en el § 5 se demuestra aquí el

Teorema 2.º (Criterio general de convergencia, de Cauchy): *La condición necesaria y suficiente para que el conjunto de los puntos* z_n *tenga un límite es que, dado un valor arbitrario tan pequeño como se quiera de* $\varepsilon > 0$, *exista un número* $n_0 = n_0(\varepsilon)$, *tal que para todos los* $n > n_0(\varepsilon)$ *y todos los* $p \geq 0$, *sea siempre*

$$|z_{n+p} - z_n| < \varepsilon. \tag{4}$$

Demostración: Si existe lím $z_n = \zeta$, para todo $n > n_1(\varepsilon)$ es

$$|z_n - \zeta| < \tfrac{1}{2}\varepsilon,$$

luego, para todo $n > n_1$ y todo $p \geq 0$ será:

$$|z_{n+p} - z_n| = |(z_{n+p} - \zeta) - (z_n - \zeta)|$$
$$\leq |z_{n+p} - \zeta| + |z_n - \zeta| < \varepsilon;$$

por tanto, la condición (4) es suficiente. Por otra parte, razonando como en el § 5, se deduce de la misma condición (4) que el conjunto de los z_n es acotado y, por consiguiente, tiene, por lo menos, un punto de acumulación, el cual, según (4), es único.

La condición (4) es la expresión más general del criterio de convergencia de las sucesiones de números complejos, y, con menos palabras, también podría formularse así: A partir de un cierto valor de n, todos los puntos z_n deben estar muy *densamente* próximos entre sí.

El cálculo con las sucesiones convergentes de números complejos y con series de los mismos se realiza lo mismo que cuando se opera con números reales, por lo que no insistiremos sobre este punto, que suponemos ya conocido.

Lo mismo que en el caso de los conjuntos lineales, se formula aquí un

Principio de encaje: Si $G_1, G_2, \ldots, G_n, \ldots$ forman una sucesión de áreas completamente arbitrarias [1] (por ejemplo, cuadrados, triángulos, círculos, etc.), tales que cada una está contenida en la anterior — condición que pueden cumplir teniendo puntos comunes sus contornos —, y las dimensiones de estas áreas tienden a cero al crecer n, existe siempre *un* punto, ζ, y sólo uno, que pertenece a *todas* las G_n.

[1] Más preciso y general: *Recintos* cerrados, según la definición dada en el artículo siguiente.

Un ejemplo de tales «encajes de áreas» se ha presentado ya en la demostración del teorema de Bolzano-Weierstrass.

Demostración: Se reconoce desde luego que no puede haber dos puntos que pertenezcan a todas las G_n siguiendo el mismo procedimiento que al tratar de los encajes de segmentos. Si ahora escogemos en cada G_n un punto z_n, el conjunto de estos z_n tiene un punto de acumulación, que pertenece a todas las G_n, pues si estuviera fuera de una de estas áreas, estaría también fuera de todas las que le siguen en la sucesión v, por consiguiente, no podría ser de acumulación de los z_n.

Para mejor comprensión de cuanto sigue, daremos algunas nuevas definiciones:

1.ª Se dice que z es un *punto aislado* del conjunto M, si existe un entorno de z que no contiene ningún otro punto del conjunto.

El conjunto M_1 y los M_3 a M_6 se componen de puntos aislados, exclusivamente; M_2 y los demás conjuntos del § 2 no tienen ningún punto aislado.

2.ª Se dice que un punto perteneciente al conjunto M es *punto interior* del conjunto, cuando todos los puntos de uno de sus entornos pertenecen al conjunto M.

Sólo los conjuntos M_9 a M_{12}, entre los citados, tienen puntos interiores. Con excepción del M_{10}, todos ellos están constituídos por puntos interiores, exclusivamente [1].

3.ª Se dice que un punto Z (que puede pertenecer o no al conjunto M) es *punto frontera* de M, si es punto de acumulación de este conjunto, pero sin pertenecer al mismo.

[1] Esto último, que sorprende a los principiantes, se explica con toda claridad: Alrededor de cualquier punto, del conjunto $|z| < 1$, por ejemplo, se puede describir, en efecto, un círculo que esté contenido por entero en el conjunto. No hay, por consiguiente, ningún punto «por muy próximo que esté al contorno» que no permita la construcción de un entorno de esta naturaleza.

Para M_8 y M_9 los puntos del contorno circular son puntos frontera del conjunto; M_2 y M_8 se componen de puntos frontera, exclusivamente; el conjunto de los puntos z, tales que es $|z| > 0$ tiene un solo punto frontera, el $\zeta = 0$.

4.ª Se dice que un conjunto es *cerrado*, cuando todos sus puntos frontera (y, por tanto, más generalmente, todos sus puntos de acumulación) pertenecen al conjunto.

M_2, M_8 y M_{10} son conjuntos cerrados.

Se demuestran con gran facilidad los dos teoremas siguientes:

Teorema 4.°: *Todo punto de acumulación de un conjunto, que no pertenezca a éste, es punto frontera del mismo.*

Teorema 5.°: *Los puntos fronteras de un conjunto forman un conjunto cerrado.*

De mayor alcance que estos teoremas, y de muy frecuente aplicación en lo sucesivo, es el teorema de Heine-Borel, en el que se consideran un conjunto acotado y cerrado dado, M, y los círculos, K_z, de radio positivo, pero tan pequeño como se quiera, cuyos centros son todos los puntos, z, de M. Se forma así un cierto conjunto infinito de círculos tales, que cada punto de M está *cubierto* por uno, al menos, de los círculos, es decir, está en su interior. En tal caso, se verifica, como decimos, el

Teorema de Heine-Borel: *Si todo punto, z, de un conjunto cerrado y acotado, M, es centro de un círculo, K_z, es suficiente* **un número finito** *de estos círculos para recubrir todo el conjunto.*

Demostración: Comenzamos, como en la demostración del teorema de Bolzano-Weierstrass, por encerrar el conjunto M en un cuadrado Q_1 y dividir éste en cuatro cuadrados congruentes entre sí. Los puntos contenidos en cada uno de estos cuadrados (a los cuales agregamos los de sus lados) forman a su vez un conjunto cerrado y acotado. Si el teorema no fuese cierto, harían falta *infinitos* círculos para recubrir uno, al menos, de estos cuadrados, al cual (uno cualquiera de los que exigiesen infinitos círculos para ser recubiertos, si hay más de uno en estas condiciones) llamaremos Q_2. Procediendo del mismo modo con Q_2, obtendremos otro Q_3, y siguiendo así, tendríamos, en general, cuadrados, Q_n, que contendrían un conjunto parcial del M y en los que sería falso el teorema, es decir, para los que harían falta infinitos círculos para recubrirlos.

Sea ζ el punto interior a este encaje de cuadrados. El punto ζ es de acumulación de M; luego, según la hipótesis, pertence a M y, por consiguiente, es centro de uno de los círculos que venimos considerando. Designando por ρ el radio de este círculo y tomando p suficientemente grande para que la diagonal de Q_p sea menor que ρ, todos los puntos de M contenidos en Q_p estarían recubiertos por este círculo, resultado en contradicción con el hecho de ser precisos infinitos círculos para recubrirlos; luego la hipótesis de que el teorema no fuese cierto para alguno de los cuadrados es falsa, y, por tanto, el teorema es cierto.

Problema 1.° — ¿Es acotado el conjunto definido por la relación

$$|z| + R(z) \leqq 1 \,?$$

¿Qué parte del plano llenan los puntos de este conjunto?

Problema 2.° — Demostrar que todo conjunto que sólo se compone de puntos aislados es numerable.

§ 7. Trayectorias y recintos

En lo que sigue hemos de considerar frecuentemente «recintos» y «trayectorias» en el plano, lo cual exige que demos definiciones precisas de ambos conceptos.

1.° Si $x(t)$ e $y(t)$ son funciones (reales) continuas de t en el intervalo $\alpha \leq t \leq \beta$,

$$x = x(t), \qquad y = y(t)$$

son ecuaciones paramétricas que representan una «curva continua», útil para nuestro objeto si se admite que a dos valores diferentes de t corresponden dos puntos, también diferentes, es decir, que la curva «no tiene puntos dobles»: una figura de esta especie diremos que es un «arco de *curva de Jordan*». Si ponemos $x + iy = z$ y, por consiguiente, $x(t) + iy(t) = z(t)$, se podrá representar sencillamente dicho arco en la forma

$$z = z(t), \qquad \alpha \leq t \leq \beta.$$

El arco considerado puede no tener longitud determinada (1); si la tiene, diremos que es *rectificable*, y le llamaremos, para abreviar, «**segmento**» de origen $z(\alpha)$ y extremo $z(\beta)$. Según este convenio, un segmento siempre está «orientado», es decir, de dos puntos del segmento, siempre se sabe cuál es el que precede al otro, y, además, qué parte de la curva es la que hay que tomar como situada «entre» ellos.

Considerando varios segmentos sucesivos, se obtiene una «**trayectoria**». Esta tiene, pues, siempre una longitud determinada, está orientada y admite una representación de la forma $z = z(t)$, tal que el punto z describe la trayectoria completa cuando t recorre todo un determinado intervalo

(1) Nos limitamos a enunciar este concepto, sin profundizar en él. La definición es ésta: Si se divide el intervalo paramétrico (α, β) en un número cualquiera de partes, n, determinadas por la sucesión monótona $\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = \beta$ y se marcan sobre el arco de curva los puntos $z(t_\lambda)$, $\lambda = 0, 1, 2, \ldots, n$ y se unen sucesivamente por medio de segmentos rectilíneos, se obtiene un «contorno poligonal de cuerdas» inscrito en el arco de curva, que, naturalmente, tiene una cierta longitud. Si el conjunto de todos los contornos poligonales inscritos que así se obtienen es acotado, se dice que el arco de curva es **rectificable**, y el *extremo superior* de dicho conjunto se llama **longitud** del arco. La longitud de una curva compuesta de varios arcos rectificables es la suma de las longitudes de éstos: y cosa análoga se dice si una curva se divide en varias partes por medio de puntos de ella.

(real). A diferencia de lo que ocurre con los segmentos, una trayectoria puede cortarse a sí misma.

Como consecuencia de la continuidad de $x(t)$ e $y(t)$, todos los puntos de una trayectoria forman un conjunto *cerrado*.

Si un segmento es tal que coinciden su origen y su extremo, es decir, que es $z(\alpha) = z(\beta)$, se dice que es un **segmento cerrado**. Estos segmentos o trayectorias cerrados carecen de puntos dobles, pero tienen un sentido determinado, es decir, que $z(t)$ describe por entero, una sola vez, el segmento, cuando t se mueve de α a β, y dividen al plano en dos porciones separadas por el segmento, una interior y otra exterior. Mientras expresamente no se advierta lo contrario, supondremos que la orientación del segmento es tal que al recorrerlo el punto $z(t)$ deja la parte *interior a la izquierda* (sentido *matemático positivo*).

2.° Llamaremos **recinto**, **campo** o **dominio** a todo conjunto de puntos tal que

a) todos sus puntos sean *interiores* (véase § 6, definición 2.ª, y la nota al pie), y que

b) sea *conexo*,

entendiendo por *conexo* un conjunto de puntos tal que dos cualesquiera de sus puntos se puedan considerar siempre como origen y extremo de un segmento cuyos puntos pertenezcan todos al conjunto.

Con arreglo a esta definición, los puntos fronteras de un recinto **no** deben ser contados entre los puntos de éste: cuando haya que contarlos como pertenecientes al conjunto, se dirá siempre que se trata de un *recinto cerrado*.

Un recinto puede, según esto, tener formas muy diversas. Junto a recintos tan sencillos como los círculos, polígonos, semiplanos, etc., forman también recinto, por ejemplo, los puntos del siguiente conjunto; se considera el semiplano superior $R(z) > 0$ excluyendo de él todos los puntos situados en el eje real y en las perpendiculares al mismo trazadas por los puntos 0 y $\pm \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, y que no distan de dicho eje más de

una unidad. — Obsérvese que en este recinto no se puede llegar, recorriendo ningún segmento, al punto 0.

Entre los recintos, merecen ser señalados de modo especial los que son *simplemente conexos*, es decir, tales que *todo* segmento cerrado contenido en el recinto, sólo encierra puntos pertenecientes al recinto (por consiguiente, ninguno de sus puntos fronteras).

Los círculos, triángulos, etc., son simplemente conexos; en cambio, no lo es el recinto comprendido entre dos círculos concéntricos, ni el $|z| > 0$.

Teorema: Si una trayectoria L (o, más general, un conjunto de puntos cerrado) está contenida en un recinto G, existe un número positivo, ρ, tal que el círculo de radio ρ, cuyo centro sea cualquier punto del recinto, está contenido por entero en éste; dicho de otro modo: L no está tan cerca como se quiera del contorno de G.

Demostración: Puesto que cada punto, z, de L está en G, también pertenecerá a G un entorno circular del mismo punto z, y radio ρ_z. Como en el teorema de Heine-Borel, hagamos corresponder a cada uno de estos puntos el círculo que lo tenga por centro y de radio $\frac{1}{2}\rho_z$; según dicho teorema, bastará un número suficiente de estos círculos para recubrir totalmente a L; por consiguiente, si ρ es el radio del menor de ellos, ρ satisface a las condiciones del teorema, puesto, que, en efecto, todo círculo de radio ρ está contenido por entero en G, aun en el caso de que su centro esté en la circunferencia de alguno de aquellos círculos que en número finito recubren la trayectoria L.

CAPÍTULO II

FUNCIONES DE UNA VARIABLE COMPLEJA

§ 8. Concepto de la función más general (uniforme) de una variable compleja

Se dice que z es una *variable* (compleja) cuando puede representar un punto cualquiera de un conjunto de puntos M, y a este conjunto se le llama *campo de variabilidad*.

Si se supone una *ley*, tal que a cada punto, z, de M haga corresponder un nuevo valor numérico determinado, w, se dice que w es una *función* (*uniforme*) *de la variable* (*compleja*) z, y se denota así:

$$w = f(z),$$

en cuya expresión se indica por el símbolo «f» el *proceso de cálculo* correspondiente a la ley dada. El conjunto M se llama *campo* o *recinto de definición* de la función, y z es la variable o el *argumento* [1] de la misma. En lugar de la letra f pueden utilizarse cualesquiera otros signos: en lo sucesivo, usaremos frecuentemente los F, g, h, φ, etc.

Supongamos descompuestas z y w en sus partes real e imaginaria: $z = x + iy$, $w = u + iv$; entonces la relación

$$w = f(z)$$

---

[1] En castellano es poco frecuente esta denominación, que suele reservarse para el ángulo que el radio vector de un punto o número complejo forma con el semieje real positivo. (*N. del T.*).

puede también interpretarse en el sentido de hacer corres ponder a un par de números reales, x e y, dos nuevos números reales, u y v, con lo cual aparecen éstos como dos funciones reales de las dos variables reales x e y; poniendo explícitamente

$$u = \psi(x, y), \quad v = \chi(x, y),$$

será

$$f(z) = \psi(x, y) + i\chi(x, y).$$

La función ψ recibe el nombre de *parte real* de la $f(z)$ y la χ el de *parte imaginaria* de ésta. En ocasiones conviene estudiar de este modo las funciones de variable compleja, — así lo haremos, por ejemplo, en el § 13 —; pero, en general, será mucho mejor prescindir de esta separación y considerar $f(z)$ como *una* función de *una* variable compleja z.

Suponemos al lector familiarizado con las llamadas funciones elementales; por consiguiente, con las funciones racionales, la exponencial e^z y las trigonométricas sen z, cos z, tg z, cot z. En estos casos, el campo M es todo el plano o el plano con excepción de ciertos puntos (por ejemplo, para las funciones racionales están excluídos los ceros del denominador; para cot z, todos los puntos reales de la forma $k\pi$, $k = 0, \pm 1, \ldots$; etc.), y la ley de formación de la función tiene una expresión explícita; es decir, el valor, w, de la función, correspondiente a uno de z, puede ser calculado mediante la aplicación de las cuatro operaciones aritméticas fundamentales, en número finito o infinito. Claro es que, en el último caso, combinadas con la del paso al límite.

Pero la ley de obtención de la función puede darse de manera muy diferente. Por ejemplo, si M es el conjunto M_7 del § 2, podría convenirse en que fuese $f(z) = 1, 2, 3, n, \ldots$ según que en el desarrollo en fracción decimal periódica de y, el período tuviese $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ cifras, u otros convenios análogos.

Como veremos en seguida, no es necesario que una función venga dada por una expresión explícita, sino que puede determinarse de otros muchos modos; lo único necesario, con arreglo a la definición, es que, dado un valor cualquiera de z,

Manuel Alberto del Castillo

perteneciente al conjunto M, quede determinado, sin ambigüedad alguna, el valor, w, correspondiente de la función.

De aquí se deduce que el concepto así establecido de función es sumamente amplio, tanto que apenas podrían establecerse reglas y propiedades de las funciones. Nuestro problema consistirá en imponer a las hipótesis las restricciones adecuadas para obtener del conjunto de todas las funciones una clase de particular interés por que sean de aplicación a la Matemática y las Ciencias Naturales.

Las condiciones restrictivas que impondremos son las de continuidad y diferenciabilidad.

§ 9. **Continuidad**

Suponemos, en primer término, que el campo de variabilidad, es un recinto G tal como ha sido definido en el § 7, 2.º En este caso, al mismo tiempo que *cada* punto de G, pertenece a este recinto un cierto entorno de aquel punto, y entonces, como z indica cualquier punto del mismo, y, por consiguiente, puede moverse libremente en G, se dice que z es una variable continua en G.

Supondremos, además, que también la función es continua. La definición de continuidad — que tiene la misma expresión formal que en el caso de las funciones de variable real —, puede enunciarse en una de las tres siguientes diversas formas:

1.ª forma: Dados ζ (en G) y $\varepsilon > 0$, siempre es posible encontrar un número $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, tal que, siendo $\omega = f(\zeta)$, para *todos* los valores de z, tales que sea:

$$|z - \zeta| < \delta$$

se verifique:

$$|w - \omega| = |f(z) - f(\zeta)| < \varepsilon.$$

Esta condición se expresa brevemente en esta otra

2.ª forma: A puntos muy próximos al punto z, deben corresponder valores de la función poco diferentes entre sí; o, finalmente:

3.ª forma: Dada una sucesión completamente arbitraria $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$, con la única condición de ser $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = \zeta$, los valores correspondientes de la función $w_1, w_2, \ldots, w_n \ldots$ [1] deben ser tales que también sea:

$$\lim_{n \to \infty} w_n = \omega = f(\zeta).$$

Estas tres formas de definición de la continuidad expresan, en el fondo, exactamente lo mismo.

No creemos necesario insistir sobre las conocidas propiedades de la suma, diferencia, producto y cociente de dos funciones continuas, y únicamente para dejar sentado con toda claridad el *concepto de continuidad*, vamos a exponer un ejemplo de una función *discontinua* (es decir, *no* continua):

Tomamos como recinto G todo el plano y definimos una función $f(z)$ de la siguiente manera:

$f(0) = 0$; y para $z \neq 0$, ó sea $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$, siendo $r > 0$, $0 \leqq \theta < 2\pi$,

ponemos $f(z) = \theta$. Esto significa que en todos los puntos de una semirrecta que parte de 0, tiene $f(z)$ el mismo valor, excepto en el punto $z = 0$.

La función así definida no es continua en el punto cero, pues (según la primera forma de definición de la continuidad) para todos los puntos de un entorno del origen debería ser:

$$|f(z) - f(0)| < \varepsilon, \quad \text{es decir,} \quad |f(z)| < \varepsilon,$$

cosa que seguramente no es cierta en cuanto el punto z está en un rayo para el cual es $\theta > \varepsilon$. Unicamente cuando, moviéndose a lo largo del semieje real positivo ($\theta = 0$), se acerca z al origen (véase la tercera forma de la definición) queda satisfecha la condición de continuidad, puesto que para todos los puntos de esa semirrecta, es siempre

$$|f(z) - f(0)| = 0 \quad \text{luego, seguramente,} \quad < \varepsilon;$$

[1] Se aplica a las letras w el mismo índice que al argumento z; así, pues, w_n representa, de un modo general, el valor que toma la función $w = f(z)$ para $z = z_n$.

pero esto no es suficiente para la continuidad, la cual exige que de *cualquier modo* que se acerque z a ζ, también se acerque w al valor ω.

Se ve fácilmente que en todos los demás puntos de G, salvo en los situados en el semieje real positivo, es $f(z)$ continua.

A veces las funciones estudiadas están también definidas en los puntos fronteras de G (por consiguiente, entonces, en el recinto *cerrado*, que designaremos por $\overline{G}$). En tales casos, se entenderá que la función es continua en un punto frontera de $\overline{G}$, si para todos los puntos, z, de $\overline{G}$ quedan satisfechas las condiciones de continuidad; pues los puntos que no pertenecen a $\overline{G}$ quedan fuera de toda consideración. Esto justifica la denominación muy frecuente de «*continuidad hacia dentro*». De modo análogo se habla de «*continuidad a lo largo de una línea*», entendiéndose entonces que las condiciones de continuidad quedan satisfechas para todos los puntos de dicha línea, exclusivamente — sin tener en cuenta para nada los valores de la función en otros puntos. En este sentido, la función $f(z)$, antes definida, es «continua a lo largo del semieje real positivo», puesto que en todos sus puntos tiene el valor cero. A pesar de esto, la función no es simplemente continua en *ningún* punto de esta semirrecta.

Las funciones hasta aquí consideradas son las funciones continuas de la variable continua z.

Para las funciones $\psi(x, y)$, y $\chi(x, y)$, de que hemos hablado en el artículo anterior, la continuidad de $f(z)$ significa, evidentemente, que dichas dos funciones son funciones continuas de las dos variables reales.

Lo mismo que para éstas, se verifica para las funciones continuas de una variable compleja el

Teorema de la continuidad uniforme: Si $f(z)$ es continua en un recinto *cerrado* y *acotado*, $\overline{G}$, siempre es posible, dado ε, encontrar un número $\delta = \delta(\varepsilon)$, tal que para dos puntos cualesquiera z' y z'' de $\overline{G}$, tales que sea su distancia

$|z'' - z'| < \delta$, la diferencia de los valores correspondientes de la función satisfaga a la condición:

$$|w'' - w'| = |f(z'') - f(z')| < \varepsilon.$$

Demostración: Como la función es continua en todo punto z de G, se puede trazar, haciendo centro en cada punto, z, un círculo de radio ρ_z, tal que dentro de él la oscilación de la función [1] sea $< \varepsilon$. Hagamos corresponder ahora, como en el teorema de Heine-Borel (véase también § 7, teorema), a cada punto, z, de G el círculo de centro z y radio $\frac{1}{2}\rho_z$. Si el menor de los radios de estos círculos es δ, este número satisface a las condiciones del enunciado; pues si es $|z'' - z'| < \delta$, y z' está recubierto por el círculo de radio $\frac{1}{2}\rho_\zeta$ y centro ζ, será $\delta \leq \frac{1}{2}\rho_\zeta$ y, por consiguiente, z' y z'' están en el círculo de centro ζ y radio ρ_ζ, luego es

$$|f(z'') - f(z')| < \varepsilon.$$

Problema. — Estudiar la continuidad de las dos funciones:

α) $f(z) = 0$ para $z = 0$ y para todos los valores de z cuyo valor absoluto sea un número irracional; y

$$f(z) = \frac{1}{q} \qquad \text{cuando sea} \qquad |z| = \frac{p}{q},$$

siendo p y q números enteros, positivos y primos entre sí.

β) $f(z) = 0$ para $z = 0$; $f(z) = \operatorname{sen} \theta$ para $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ y $r > 0$.

Debe señalarse para las dos funciones en qué puntos son continuas y en cuáles son discontinuas.

§ 10. Diferenciabilidad

La segunda condición restrictiva que imponemos a las funciones en cuyo estudio nos hemos de ocupar, es la de que en todo punto de G tengan una derivada determinada. Tales funciones se dice que son *diferenciables* en G.

[1] Es decir, el extremo superior de los valores de $|f(z'') - f(z')|$ para dos puntos cualesquiera del círculo.

La definición de la diferenciabilidad — formalmente la misma que en las funciones de variable real — puede darse en tres diferentes formas:

1.ª forma: A cada punto, ζ, de G se le hace corresponder un nuevo número — que se acostumbra designar por $f'(\zeta)$ o $\left(\frac{dw}{dz}\right)_{z=\zeta}$ y se llama derivada o cociente diferencial de $f(z)$ en el punto ζ — tal que, dado un número arbitrario, $\varepsilon > 0$, haya otro $\delta = \delta(\varepsilon)$, tal que para *todos* los puntos que satisfagan a la condición $|z - \zeta| < \delta$ sea

$$\left| \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} - f'(\zeta) \right| < \varepsilon.$$

2.ª forma: Para *todos* los puntos (de G) próximos al ζ, el cociente de diferencias

$$\frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} = \frac{w - \omega}{z - \zeta} = \left(\frac{\Delta w}{\Delta z}\right)_\zeta$$

debe diferir poco de un cierto número, que, como antes, se designa por $f'(\zeta)$, etc.

3.ª forma: Si $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ es una sucesión *cualquiera* de puntos de G, diferentes entre sí y de ζ, tales que es

$$\lim_{n \to \infty} z_n = \zeta,$$

la sucesión de los números

$$\Delta_n = \frac{f(z_n) - f(\zeta)}{z_n - \zeta}$$

tiene siempre límite

$$\lim_{n \to \infty} \Delta_n.$$

Este valor, que entonces es independiente de la elección particular de los z_n, se designa por $f'(\zeta)$.

Como en el caso de la continuidad, no nos detenemos a repetir las conocidas reglas de la diferenciación, y nos limitaremos, para mejor aclarar el concepto de diferenciabilidad, a mostrar un ejemplo de función continua, pero no diferenciable, en el sentido que acabamos de definir:

Tomemos como recinto G todo el plano y como función la $f(z) = R(z) = x$.

Se reconoce fácilmente que la función es continua en todo el campo de variabilidad de z, pero no es diferenciable en ninguno de sus puntos, ζ. Pues si lo fuese, para todo z próximo a ζ (véase la 2.ª forma de la definición), el cociente

$$\frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} = \frac{x - \xi}{z - \zeta}$$

debería diferir poco de un número determinado; pero si se toma z en la paralela al eje y trazada por ζ, es $x = \xi$ y, por consiguiente, el cociente nulo, y, tomando z en la paralela al eje x que pasa por ζ, es $x - \xi = z - \zeta$ y, por tanto, el cociente de las diferencias $= 1$; luego el cociente no difiere poco de *un* número determinado, para *todos* los valores de z próximos a ζ.

Vemos, pues, que una función continua puede no ser diferenciable: en cambio, se demuestra con gran facilidad que toda función diferenciable en un punto es necesariamente continua en él. Y, en efecto; de ser $\lim \Delta_n = f'(\zeta)$, se sigue

$$\lim [f(z_n) - f(\zeta)] = \lim [(z_n - \zeta) \cdot f'(\zeta)] = 0,$$

es decir, $\lim f(z_n) = f(\zeta)$, como se quería demostrar.

La condición de continuidad está, pues, contenida en la de diferenciabilidad.

Definición: Toda función definida en un recinto G y diferenciable en todos sus puntos, se llama **función analítica regular** *(uniforme)*, o también, simplemente, *analítica* o *regular*.

La propiedad de regularidad se refiere siempre, según esto, a una función *en un recinto*: sin embargo, también se dice, para cada uno de los puntos del recinto, que la función es analítica en él. Pero conviene observar que la regularidad

en un punto siempre supone la regularidad en un cierto entorno del mismo, puesto que este punto *eo ipso* debe ser punto **interior** del recinto de regularidad.

Todas las funciones elementales antes citadas son analíticas en su campo de definición; en cambio, no lo es la $f(z) = R(z)$.

En lo que sigue veremos que las funciones analíticas son las de constitución más uniforme y, por consiguiente, también de la mayor importancia para todas las ciencias matemáticas y naturales.

La significación de la condición de diferenciabilidad de una función en orden a las funciones que hemos designado por los símbolos $\psi(x, y)$ y $\chi(x, y)$, se aprecia inmediatamente, como vamos a ver ahora.

Como el cociente de diferencias

$$\left(\frac{\Delta w}{\Delta z}\right)_{z=\zeta} =$$

$$\frac{[\psi(\xi + \Delta x, \eta + \Delta y) + i\chi(\xi + \Delta x, \eta + \Delta y)] - [\psi(\xi, \eta) + i\chi(\xi, \eta)]}{\Delta x + i\Delta y}$$

debe tender a un límite determinado, cualquiera que sea el modo de tender z hacia ζ, es decir, de tender $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ hacia 0, este valor límite existirá, en particular, cuando, siendo nulo uno cualquiera de los incrementos Δx, Δy, se haga tender el otro hacia 0, o sea si una vez se hace mover z paralelamente al eje x y otra al eje y. Se ve, desde luego, que deben existir las cuatro derivadas parciales de primer orden de ψ y χ respecto a x e y en el punto (ξ, η):

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \chi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \chi}{\partial y}.$$

En el primer modo de aproximación de z a ζ es:

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)_{z=\zeta} = \frac{\partial\psi}{\partial x} + i\,\frac{\partial\chi}{\partial x},$$

y, en el segundo,

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)_{z=\zeta} = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y} + i\,\frac{\partial\chi}{\partial y}\right);$$

por consiguiente, como ambos valores deben ser iguales, las cuatro derivadas parciales de primer orden deben satisfacer a las condiciones:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial\chi} \quad \text{y} \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} = -\frac{\partial\chi}{\partial x}.$$

Estas importantes ecuaciones, a las que han de satisfacer la parte real y la imaginaria de $f(z)$, reciben el nombre de **ecuaciones diferenciales** (*parciales*) de **Cauchy-Riemann.**

La gran importancia de estas ecuaciones estriba en que son características para las funciones analíticas, por verificarse la propiedad recíproca, que aquí nos limitamos a enunciar, sin demostrarla:

Teorema: Si existen las cuatro derivadas parciales de ψ y χ respecto a x e y, y satisfacen a las ecuaciones de Cauchy-Riemann y, además, *son continuas*, la función

$$f(z) = \psi(x, y) + i\chi(x, y)$$

es analítica.

Dichas ecuaciones diferenciales caracterizan, pues, sin excepción, las funciones reales de la forma $\psi(x, y)$ y $\chi(x, y)$, que pueden ser componentes de una función analítica.

Si además se supone que existen las derivadas parciales de segundo orden y que son continuas (en el § 19 veremos que

siempre ocurre así), de las ecuaciones de Cauchy-Riemann se deduce:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\chi}{\partial y\partial x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2\chi}{\partial x\partial y} = -\frac{\partial^2\chi}{\partial y\partial x},$$

y, por consiguiente,

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0$$

y, de modo análogo,

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\chi}{\partial y^2} = 0.$$

Las dos funciones ψ y χ satisfacen, pues, a una misma ecuación —la llamada **ecuación diferencial de Laplace**— de la forma:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0;$$

de donde se sigue que ni la parte real ni la imaginaria de $f(z)$ pueden ser tomadas arbitrariamente, sino que cada una de ellas ha de satisfacer, por separado, a la ecuación de Laplace, y las dos juntas a las de Cauchy-Riemann.

Problemas. — 1.º ¿Son diferenciables las funciones definidas en el problema del § 9? ¿Lo es la función $f(z) = |z|$?

2.º Comprobar las ecuaciones diferenciales de Laplace y Cauchy-Riemann para el caso de las funciones elementales, por ejemplo, en las

$$f(z) = z,\ z^2,\ z^n,\ e^z,\ \text{sen}\ z,\ \cos z,\ \text{tg}\ z,\ \text{etc.}$$

SEGUNDA PARTE

INTEGRALES

CAPÍTULO TERCERO

INTEGRAL DE UNA FUNCIÓN CONTINUA

§ 11. Definición de la integral definida

En el Cálculo integral se define la integral definida de una función real continua, $y = F(x)$, de la variable real x, entre los límites x_0 y X, del siguiente modo:

Se divide el intervalo (x_0, X) (supondremos, por ejemplo, $x_0 < X$) en n partes cualesquiera; sean

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = X$$

los puntos de división; en cada intervalo $(x_{\lambda-1}, x_\lambda)$ se toma un punto intermedio arbitrario ξ_λ y se forma la suma

$$J_n = \sum_{\lambda=1}^{n} (x_\lambda - x_{\lambda-1}) F(\xi_\lambda).$$

Si se imagina que todo esto se hace de cualquier modo, para $n = 1, 2, 3, \ldots$ se obtiene una sucesión $J_1, J_2, J_3, \ldots, J_n \ldots$ que tiene siempre un valor límite

$$\lim_{n \to \infty} J_n = J,$$

independiente de la elección de los puntos de división y de los intermedios, siempre que, al crecer n indefinidamente, *todos* los intervalos $(x_{\lambda-1}, x_\lambda)$ sean menores que toda cantidad dada; o, en otros términos: Existe un número J, tal que dado $\varepsilon > 0$ se puede determinar un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, de manera que sea

$$|J_n - J| < \varepsilon,$$

siempre que todos los intervalos cumplan la condición:

$$|x_\lambda - x_{\lambda-1}| < \delta.$$

Este número, J, se llama la integral definida y se representa con la notación

$$J = \int_{x_0}^{X} F(x)\,dx.$$

Supondremos conocida, en lo que sigue, tanto esta definición de integral definida (real) como su interpretación geométrica de medida aproximada de un área, considerada como suma de rectángulos.

Sea ahora $w = f(z)$ una función de z, continua en un recinto G (de momento no es precisa la diferenciabilidad), y sean z_0 y Z dos puntos cualesquiera de G. Entonces se llega, de modo completamente análogo, a la siguiente definición de integral definida de una función de variable compleja:

Se une z_0 con Z por medio de una trayectoria L contenida en G y se divide ésta en n partes por medio de los puntos sucesivos $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, z_n = Z$; en cada uno de los arcos parciales $z_{\lambda-1}\, z_\lambda$ se toma un punto intermedio, ζ_λ, y se forma la suma

$$J_n = \sum_{n=1}^{n} (z_\lambda - z_{\lambda-1}) f(\zeta_\lambda).$$

Se demuestra entonces que, también en este caso, existe siempre

$$\lim_{n \leftarrow \infty} J_n = J$$

y es independiente de la elección de los puntos de división y de los intermedios — pero, naturalmente, *no* de la trayectoria L —, siempre que las longitudes de *todos* los arquitos $z_{\lambda-1}\, z_\lambda$ sean menores que toda cantidad dada, cuando su número, n, crezca indefinidamente. Habrá, pues, de demostrarse aquí la existencia de un número J que goza de la siguiente propiedad: Dado $\varepsilon > 0$, se puede determinar siempre un número $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, tal que sea

$$|J_n - J| < \varepsilon$$

si *todos* los arcos parciales $z_{\lambda-1}\, z_\lambda$ cumplen la sola condición de ser menores que δ.

El valor límite así obtenido,

$$J = \lim_{n \to \infty} \left\{ \sum_{\lambda=1}^{n} (z_\lambda - z_{\lambda-1}) f(\zeta_\lambda) \right\},$$

se llama la integral definida de la función $f(z)$ tomada a lo largo de L y se representa por

$$^{(L)}\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz \quad \text{o, más brevemente, por} \quad ^{(L)}\int f(z)\,dz.$$

A diferencia de lo que ocurre en el caso de las integrales reales, aquí no es posible una interpretación geométrica sencilla.

§ 12. Demostración de la existencia de la integral

Por razón de brevedad, llamaremos a las sumas de n términos, de las cuales hemos de demostrar que tienen límite, sumas-Σ; y, cuando hablemos de un arco (a, b) de trayectoria, nombraremos sus extremos en el mismo orden que se cuentan en ésta (orientada).

Con estos convenios se verifica el

Lema 1.°: Sea (a, b) un segmento L' de la trayectoria L, de longitud l'; si la oscilación de la función $f(z)$ en este arco [1] es menor que σ, las dos sumas - Σ correspondientes a este arco y valores $n = 1$ y $n = p$ (≥ 1) difieren en menos de $2\, l'\sigma$.

Demostración: Sean $s = (b - a) f(\alpha_0)$ y

$$s' = (a_1 - a) f(\alpha_1) + (a_2 - a_1) f(\alpha_2) + \ldots + (b - a_{p-1}) f(\alpha_p)$$

las dos sumas - Σ, en las que hemos designado los puntos de división por $a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}$ y los intermedios por $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, respectivamente. Según la hipótesis hecha, es

$$|f(\alpha_\lambda) - f(a)| < \sigma, \quad \lambda = 0, 1, \ldots p,$$

es decir, que se puede poner

$$f(\alpha_\lambda) = f(a) + \eta_\lambda, \text{ siendo } |\eta_\lambda| < \sigma.$$

Pero entonces es

$$s - s' = (b - a)\,\eta_0 - (a_1 - a)\,\eta_1 - \ldots - (b - a_{p-1})\eta_p,$$
$$|s - s'| \leq \sigma(|b - a| + |a_1 - a| + \ldots + |b - a_{p-1}|) < 2\, l'\sigma,$$

puesto que la longitud de un contorno poligonal inscrito no puede ser mayor que la longitud del arco mismo [2].

Lema 2.°: Sea S una suma - Σ determinada, por ejemplo, de n términos, y supongamos que las oscilaciones de la función $f(z)$ en los n arcos parciales sean todas menores que σ_0.

---

[1] Es decir, el extremo superior de los valores $|f(z'') - f(z')|$ para dos puntos cualesquiera, z' y z'' del arco L'.

[2] Véase pág. 34, nota al pie.

Entonces, si se pasa de la suma - Σ S a otra S' en la que a los antiguos puntos de división se hayan agregado otros (subdivisión), cualesquiera que sean los puntos intermedios escogidos para formar la suma S', también es

$$|S - S'| < 2\, l\, \sigma_0,$$

designando por l la longitud del arco total L.

Demostración: Aplicando a cada una de las n divisiones de la trayectoria L el lema 1.°, se obtiene:

$$|S - S'| < 2\, l_1 \sigma_0 + 2 l_2 \sigma_0 + \ldots + 2\, l_n \sigma_0 = 2\, l\, \sigma_0,$$

designando por $l_1, l_2, \ldots, l_n$ las longitudes de los n arcos parciales.

Lema 3.°: Dado, arbitrariamente, $\varepsilon > 0$ se puede determinar $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, de manera que si S_1 y S_2 son dos sumas - Σ cualesquiera, correspondientes a divisiones en que *todos* los arcos parciales sean menores que δ, se verifica siempre:

$$|S_1 - S_2| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Demostración: Aplicando el teorema de la convergencia uniforme, se determina δ de manera que para dos puntos cualesquiera z' y z'' del arco sea siempre $|f(z'') - f(z')| < \frac{\varepsilon}{8l}$, si es $|z'' - z'| < \delta$. Entonces, si S_1 y S_2 son dos sumas - Σ sin otra condición que la de que *todos* los arcos parciales que las han dado origen sean $< \delta$, se hace una nueva división del arco total con aquellas primeras divisiones, es decir, de modo que los puntos de la tercera división sean los de las dos primeras. En tal caso, esta tercera se puede considerar evidentemente como una subdivisión de cada una de las primeras, y, por consiguiente, si S_3 es una suma - Σ cualquiera, correspondiente a la tercera división, aplicando el lema 2.°, tendremos:

$$|S_1 - S_3| < 2 \cdot l \cdot \frac{\varepsilon}{8l} = \frac{\varepsilon}{4}$$

y, del mismo modo,

$$|S_2 - S_3| < \frac{\varepsilon}{4};$$

luego,

$$|S_1 - S_2| = |(S_1 - S_3) - (S_2 - S_3)|$$
$$\leq |S_1 - S_3| + |S_2 - S_3| < \frac{\varepsilon}{2},$$

como se quería demostrar.

Lema 4.°: Si se considera una suma - Σ, S_n, para cada uno de los valores de $n = 1, 2, \ldots$, y se hace que **todos** los arcos parciales sean menores que cualquier magnitud dada, al crecer n indefinidamente [1], existe el

$$\lim_{n \to \infty} S_n.$$

Demostración: Dado $\varepsilon > 0$, se determina δ según el lema 3.° y se toma n_0 suficientemente grande para que las longitudes de *todos* los arcos parciales correspondientes a *todas* las S_n en las que es $n \geq n_0$ sean menores que δ. Entonces podrá aplicarse el lema 3.° a todas estas S_n, es decir, para todos los $n > n_0$ y todos los $p \geq 1$ es

$$|S_{n+p} - S_n| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

lo cual demuestra (véase § 6, teorema 2.°) la existencia del límite de S_n.

---

[1] Más preciso: Designando por λ_n la longitud del *mayor* arco parcial de la n—sima división, debe ser

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_n = 0.$$

Designando este valor límite por J, se llega así al teorema enunciado al final del artículo anterior:

Teorema: Dado $\varepsilon > 0$ y determinado $\delta = \delta(\varepsilon)$ mediante la aplicación del lema 3.°, *toda* suma - Σ, J_n, que cumpla la única condición de que las longitudes de *todos* los arcos parciales de la división correspondiente sean menores que δ, satisface a la relación:

$$|J_n - J| < \varepsilon.$$

Demostración: Si en la demostración del último lema se hace crecer el número p más allá de todo límite, la relación $|S_{n+p} - S_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ conduce a esta otra:

$$|S_n - J| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{si} \quad n \geq n_0.$$

Además, según el lema 3.°, es

$$|S_n - J_n| < \frac{\varepsilon}{2};$$

luego

$$|J_n - J| = |(S_n - J) - (S_n - J_n)| \leq |S_n - J| + |S_n - J_n| < \varepsilon,$$

lo cual demuestra la existencia del límite J, con las propiedades enunciadas, es decir, la existencia de la integral definida.

Observaciones: 1.ª En esta demostración sólo se ha hecho uso de la continuidad de la función $f(z)$ *a lo largo* de L, pero no de la continuidad en G; por consiguiente, no necesita $f(z)$ ni aun estar definida fuera de la trayectoria L.

2.ª Nuestro concepto de integral contiene, como caso particular, el de la integral real. Basta, para convencerse de ello, tomar como trayectoria L un segmento del eje real y como $f(z)$ una función de variable real.

§ 13. Cálculo de las integrales definidas

Nos toca ahora resolver una cuestión de naturaleza muy diferente, a saber: cómo se calcula, prácticamente, el valor numérico, J, de la integral en los diversos casos que pueden presentarse. Esto sólo es posible dentro de ciertas hipótesis restrictivas.

Admitiremos que las funciones reales

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

que determinan las coordenadas del punto que describe la trayectoria de integración, al recorrer t el intervalo $\alpha \leq t \leq \beta$, tienen derivadas $x'(t)$ e $y'(t)$ continuas.

Dividamos ahora el intervalo paramétrico en n partes, por medio de los puntos

$$\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = \beta,$$

y tomemos como puntos de división en la trayectoria de integración los correspondientes a estos valores del parámetro t, y como puntos intermedios de los intervalos los correspondientes a los valores intermedios del parámetro $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$. Poniendo

$$z_\lambda = z(t_\lambda) \quad \text{para } \lambda = 0, 1, 2, \ldots, n$$
$$\zeta_\lambda = z(\tau_\lambda) \quad \text{para } \lambda = 1, 2, \ldots, n$$

y designando, para abreviar,

$$\psi(x(t), y(t)) = \bar{\psi}(t), \quad \chi(x(t), y(t)) = \bar{\chi}(t),$$

podremos escribir:

$$\sum_{\lambda=1}^{n}(z_\lambda - z_{\lambda-1})f(\zeta_\lambda)$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{n}[(x_\lambda - x_{\lambda-1}) + i(y_\lambda - y_{\lambda-1})][\bar{\psi}(\tau_\lambda) + i\bar{\chi}(\tau_\lambda)].$$

Cuando se sigue el proceso de división, aumentando indefinidamente el número de partes, las cuatro sumas-Σ *reales* en que se descompone la del segundo miembro al efectuar las multiplicaciones indicadas con los paréntesis cuadrados, tienden a límites que se determinan fácilmente. Así, por ejemplo,

$$\sum_{\lambda=1}^{n}(x_\lambda - x_{\lambda-1})\bar{\psi}(\tau_\lambda) \quad \text{tiende hacia} \quad \int_\alpha^\beta \bar{\psi}(t)x'(t)dt,$$

pues, según el teorema de la media, del Cálculo diferencial, es

$$x_\lambda - x_{\lambda-1} = x(t_\lambda) - x(t_{\lambda-1}) = (t_\lambda - t_{\lambda-1})x'(\tau'_\lambda),$$

donde τ'_λ representa también un valor intermedio entre $t_{\lambda-1}$ y t_λ. Ahora bien, por ser continua $x'(t)$ en el intervalo (α, β), por hipótesis, podremos escribir:

$$x'(\tau'_\lambda) = x'(\tau_\lambda) + \varepsilon_\lambda,$$

en cuyas expresiones todas las ε_λ tienden a cero *simultáneamente*, al crecer indefinidamente el número de las divisiones. Por consiguiente, la suma real considerada es

$$= \sum_{\lambda=1}^{n}(t_\lambda - t_{\lambda-1})x'(\tau_\lambda)\cdot\bar{\psi}(\tau_\lambda) + \sum_{\lambda=1}^{n}(t_\lambda - t_{\lambda-1})\,\varepsilon_\lambda\cdot\bar{\psi}(\tau_\lambda).$$

La primera de estas sumas es, precisamente, la suma-Σ que tiende hacia la integral real $\int_\alpha^\beta \bar{\psi}(t)x'(t)dt$, y la segunda

tiende a cero, porque dado $\varepsilon > 0$, su valor absoluto, al crecer el número de partes de la división, puede tomarse

$$< \varepsilon(\beta - \alpha)\cdot\bar{\psi}_0,$$

siendo $\bar{\psi}_0$ una cota superior de $\bar{\psi}(t)$ a lo largo de L.

Análogamente se determinan los límites de las otras tres sumas-Σ.

El límite, J, al cual tienden nuestras sumas-Σ complejas, es decir, la integral definida cuyo valor tratamos de determinar, es, pues,

$$(1) \quad J = {}^{(L)}\int_{z_0}^{Z} f(z)dz = \int_\alpha^\beta \bar{\psi}x'dt - \int_\alpha^\beta \bar{\chi}y'dt + i\int_\alpha^\beta \bar{\psi}y'dt + i\int_\alpha^\beta \bar{\chi}x'dt,$$

que también puede escribirse, sin temor a confusiones, de esta otra manera:

$$(2) \qquad J = \int_\alpha^\beta (\bar{\psi} + i\bar{\chi})(x' + iy')\,dt$$

o, todavía más brevemente,

$$(3) \qquad J = \int_\alpha^\beta f(z(t))\cdot z'(t)dt$$

o, por último,

$$(4) \qquad J = \int_\alpha^\beta f(z)\,dz = {}^{(L)}\int f(z)dz,$$

recordando los límites relativos a t que z es una función de t, mientras que en la última expresión sólo aparece lo que es verdaderamente esencial, la trayectoria a lo largo de la cual se hace la integración.

Esta manera de proceder permite, como vemos, no sólo calcular el valor de una integral, sino que da a conocer con toda claridad el significado de los símbolos con que, de ordinario, se representan las integrales definidas.

Ejemplo 1.º

$$f(z) = \frac{1}{z}; \qquad L: \ z(t) = \cos t + i \operatorname{sen} t, \ 0 \leqq t \leqq 2\pi.$$

La trayectoria de integración es la circunferencia unidad, recorrida en sentido positivo matemático (el contrario al del movimiento de las agujas de un reloj) desde el punto $+1$ hasta volver al mismo punto $+1$. Según (3) es, pues,

$$J = {}^{(L)}\int \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos t + i \operatorname{sen} t}(-\operatorname{sen} t + i \cos t)\, dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i,$$

resultado que más adelante tendremos ocasión de aplicar.

Ejemplo 2.º

$$f(z) = R(z) = x; \quad z_0 = 0, \quad Z = 1 + i,$$

y hay que calcular el valor de $\int_{z_0}^{Z} f(z)\, dz$ a lo largo de dos diferentes trayectorias:

1.ª trayectoria, L_1: El segmento rectilíneo

$$z = (1 + i)t, \quad 0 \leqq t \leqq 1.$$

Se tiene:

$$J_1 = \int_0^1 t \cdot (1 + i)\, dt = (1 + i)\int_0^1 t\, dt = \tfrac{1}{2}(1 + i).$$

2.ª trayectoria, L_2: El segmento rectilíneo que va de 0 a $+1$ y de este punto, también en línea recta, hasta el $1 + i$. Calculando separadamente las dos partes y sumando, se obtiene:

$$J_2 = \tfrac{1}{2} + i,$$

lo que patentiza que se pueden obtener distintos valores al utilizar diferentes trayectorias de integración (véase, acerca de esto, el ejemplo del § 10).

Los ejemplos que siguen muestran que, a veces, lo más simple es recurrir a la definición de integral por medio de sumas (§ 11 y 12).

Manuel Alberto del Castillo

Ejemplo 3.º — Sea G todo el plano; $f(z) = 1$; y la trayectoria de integración arbitraria.

Será:

$$J_n = \sum_{\lambda=1}^{n} (z - z_{\lambda-1}) \cdot 1 = (z_1 - z_0) + (z_2 - z_1) + \ldots + (Z - z_{n-1})$$
$$= Z - z_0.$$

Por consiguiente, también es

$$\lim J_n = J = \int_{z_0}^{Z} dz = Z - z_0,$$

cualquiera que sea el camino de integración. En particular, si L es una trayectoria cerrada, que, en tal caso, designaremos siempre por C, por ser $Z = z_0$, tendremos:

$$^{(C)}\int dz = 0.$$

Ejemplo 4.º — Sea G todo el plano; $f(z) = z$; y la trayectoria de integración arbitraria.

Será:

$$J_n = \sum_{\lambda=1}^{n} (z_\lambda - z_{\lambda-1})\zeta_\lambda,$$

donde ζ_λ puede ser cualquier punto del arco de trayectoria comprendido entre $z_{\lambda-1}$ y z_λ.

Tomemos

a) $$\zeta_\lambda = z_{\lambda-1},$$

y designemos, entonces, la suma por J'_n, y será:

$$J'_n = (z_1 - z_0)\, z_0 + (z_2 - z_1)\, z_1 + \ldots + (Z - z_{n-1}) z_{n-1},$$

y si se toma

b) $$\zeta_\lambda = z_\lambda$$

y se designa la suma correspondiente por J''_n:

$$J''_n = (z_1 - z_0)\, z_1 + (z_2 - z_1)\, z_2 + \ldots + (Z - z_{n-1}) Z.$$

Sumando las dos expresiones de J'_n y J''_n, resulta:

$$J_n + J''_n = Z^2 - z_0^2:$$

luego:

$$\lim (J'_n + J''_n) = 2J = Z^2 - z_0^2,$$

es decir,

$$J = \int_{z_0}^{Z} z dz = \tfrac{1}{2}(Z^2 - z_0^2),$$

cualquiera que sea la trayectoria seguida en la integración. Si, como antes, L es un contorno cerrado C, también aquí es

$$^{(C)}\int z dz = 0.$$

Ejemplo 5.° — $\int (z - z_0)^m dz$; trayectoria L: La circunferencia de centro z_0 y radio r, descrita en sentido positivo. L puede representarse por la ecuación

$$z = z_0 + r(\cos t + i \operatorname{sen} t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

y, por consiguiente, es

$$J = \int_0^{2\pi} [r(\cos t + i \operatorname{sen} t)]^m \cdot r(-\operatorname{sen} t + i \cos t) dt$$

$$= i r^{m+1} \int_0^{2\pi} (\cos(m+1)t + i \operatorname{sen}(m+1)t) dt.$$

Ahora bien, es sabido que para todo valor entero (positivo o negativo), distinto de cero, de k, es

$$\int_0^{2\pi} \cos kt\, dt = 0 \quad \text{e} \quad \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} kt\, dt = 0$$

y para $k = 0$

$$= 2\pi \quad \text{e} \quad = 0,$$

respectivamente. Luego nuestra integral vale:

$$^{(L)}\int (z - z_0)^m dz = \begin{cases} 2\pi i, & \text{para } m = -1 \text{ (véase el ejemplo 1.°)} \\ 0, & \text{para cualquier otro valor entero de } m. \end{cases}$$

Problemas. — 1.° Calcular la última integral para el caso en que:

a) L es un cuadrado cuyo centro es el punto z_0 y cuyos lados son paralelos a los ejes coordenados;

b) L es una elipse cuyo centro es el punto z_0 y cuyos ejes son paralelos a los coordenados:

2.° Calcular $\int_{-i}^{+i} |z| dz$, cuando la trayectoria de integración es:

a) rectilínea; b) la mitad de la izquierda de la circunferencia unidad; c) la mitad de la derecha de la misma circunferencia.

§ 14. Primeras propiedades de las integrales

Los siguientes sencillos teoremas, en cuyas expresiones se supone siempre que el integrando omitido es $f(z)dz$, se deducen casi inmediatamente de la definición de integral como límite de sumas:

Teorema 1.°:

$$^{(L)}\int_{z_0}^{Z} = -\,^{(L)}\int_{Z}^{z_0},$$

es decir, si se integra dos veces a lo largo de la misma trayectoria, una vez en un sentido y otra en sentido contrario, los resultados que se obtienen son del mismo valor absoluto y signos contrarios. Designando uno de los sentidos por $+L$ y el otro por $-L$, se podrá, pues, escribir también:

$$^{(-L)}\int = -\,^{(+L)}\int \quad \text{o bien} \quad ^{(+L)}\int + \,^{(-L)}\int = 0,$$

lo cual puede expresarse brevemente diciendo: *Si sobre el mismo arco se integra* **avanzando** y **retrocediendo** *hasta el punto de partida, el valor de la integral es nulo.*

Teorema 2.°:

$$^{(L)}\int_{z_0}^{Z} + \,^{(L')}\int_{Z}^{Z'} = \,^{(L+L')}\int_{z_0}^{Z'},$$

es decir, que los caminos de integración contiguos pueden ser sumados; en la integral del segundo miembro, el símbolo $L + L'$ denota que, partiendo de z_0, se debe recorrer el arco L hasta Z, y después, desde Z, recorrer L' hasta Z'.

De la misma manera es

$$^{(L)}\int_{z_0}^{Z} = {}^{(L)}\int_{z_0}^{z'} + {}^{(L)}\int_{z'}^{Z},$$

si z' es un punto tomado en L, entre z_0 y Z; es decir, que la trayectoria de integración puede ser descompuesta.

Teorema 3.°:

$$^{(L)}\int c\, f(z)\, dz = c \cdot {}^{(L)}\int f(z)\, dz,$$

es decir, todo factor constante del integrando puede sacarse fuera del signo integral.

Teorema 4.°:

$$\int (f_1(z) + f_2(z))\, dz = {}^{(L)}\int f_1(z)\, dz + {}^{(L)}\int f_2(z)\, dz,$$

que puede enunciarse así: La integral de una suma de dos funciones, o más (pero en número finito), es igual a la suma de las integrales de los diversos sumandos. Más breve: Una suma (de un *número finito* de funciones) puede integrarse término a término.

Teorema 5.°:

$$\left| {}^{(L)}\int f(z)\, dz \right| \leq M\, l,$$

designando por M un número (positivo) que no puede ser superado por $|f(z)|$ para ningún punto, z, del arco L, y por l la longitud de éste.

La demostración de esta importante fórmula, se deduce inmediatamente de la definición de integral; pues de ser

$$J_n = \sum_{\lambda=1}^{n} (z_\lambda - z_{\lambda-1}) f(\zeta_\lambda),$$

se deduce:

$$|J_n| \leq \sum_{\lambda=1}^{n} |z_\lambda - z_{\lambda-1}| |f(\zeta_\lambda)| \leq M \sum_{\lambda=1}^{n} |z_\lambda - z_{\lambda-1}|.$$

Ahora bien, la suma que figura en el último miembro es la longitud del contorno poligonal cuyos vértices son los puntos $z_0, z_1, z_2, \ldots, Z$; luego es $\leq l$ para cualquier valor de n, y, por consiguiente, es

$$|J_n| \leq Ml$$

para todo n, y, en consecuencia, también

$$|J| \leq Ml,$$

como se quería demostrar.

Así, por ejemplo, sin necesidad de cálculo alguno, se deduce para el primer ejemplo del § 13:

$$\left| {}^{(L)}\int \frac{dz}{z} \right| \leq 1 \cdot 2\pi = 2\pi,$$

por ser para cada punto, z, de la circunferencia del círculo unidad, L, siempre $|z| = 1$, y la longitud de la circunferencia $= 2\pi$.

CAPÍTULO IV

TEOREMA DE LA INTEGRAL DE CAUCHY

§ 16. Formulación del teorema

Según la definición de integral de una función de variable compleja, el valor de la integral no depende sólo (como en las integrales reales) de los límites de integración, sino muy esencialmente de la trayectoria que los une (véase el ejemplo 2.° del § 13). Pues bien, dentro de ciertas hipótesis que en seguida enunciaremos, se verifica un *teorema fundamental* en la teoría de funciones, según el cual esta dependencia del camino recorrido *no subsiste* cuando la función no sólo es continua, sino que además es diferenciable, es decir, el llamado **teorema de la integral de Cauchy**.

Teorema fundamental de la teoría de funciones

Primera forma: *Sea $w = f(z)$ una función analítica en un recinto simplemente conexo, G, y z_0 y Z dos puntos (interiores) de G. Entonces la integral*

$$\int_{z_0}^{Z} f(z)\, dz,$$

cualquiera que sea la trayectoria de integración que, dentro de G, vaya de z_0 a Z, conserva el mismo valor.

Si L_1 y L_2 son dos trayectorias de esta naturaleza, diferentes, que no se cortan, sería, pues, según esto:

$$^{(L_1)}\!\!\int f(z)\, dz = {}^{(L_2)}\!\!\int f(z)\, dz \quad \text{o bien:} \quad {}^{(L_1)}\!\!\int - {}^{(L_2)}\!\!\int = 0.$$

Este resultado, según lo dicho en el § 14, teoremas 1.° y 2.°, significaría que la integral a lo largo de una trayectoria que parte de z_0 y vuelve a terminar en el mismo punto, o, lo que es lo mismo, a lo largo de cualquier contorno cerrado C, contenido por entero en G, es nula; es decir, que de la primera forma de enunciación del teorema se deduce la

Segunda forma: *Si la función $f(z)$ es analítica en el recinto simplemente conexo, G, cualquiera que sea una trayectoria cerrada, C, contenida en G, es:*

$$^{(C)}\!\!\int f(z)\, dz = 0.$$

Recíprocamente, partiendo de esta segunda forma se deduce inmediatamente la primera; pues siendo L_1 y L_2 dos trayectorias cualesquiera que van de z_0 a Z, o forman por sí mismas un contorno cerrado (lo cual sucede siempre que no se corten) o cada una de ellas lo forma con una tercera, L_3, y, por consiguiente, sería

$$0 = {}^{(L_1)}\!\!\int - {}^{(L_2)}\!\!\int = {}^{(L_2)}\!\!\int - {}^{(L_3)}\!\!\int, \quad \text{es decir,} \quad {}^{(L_2)}\!\!\int = {}^{(L_1)}\!\!\int.$$

Basta, por tanto, demostrar el teorema en esta segunda forma, lo que haremos en el artículo siguiente, considerando primero el caso en que el contorno C sea el perímetro de un triángulo; después el de un polígono cualquiera, y, finalmente, una trayectoria sin otra condición que la de ser cerrada.

En los ejemplos 3.° y 4.° se ha demostrado ya el teorema de Cauchy para dos funciones especiales, la $f(z) = 1$ y la $f(z) = z$, puesto que en ellos se demostró que para cualquier contorno cerrado C es

$$^{(C)}\int dz = 0 \quad \text{y} \quad ^{(C)}\int z dz = 0.$$

§ 16. Demostración del teorema fundamental

Primera parte: C es un triángulo, Δ.

Descomponiendo Δ, por medio de paralelas a sus lados, en cuatro triángulos congruentes, Δ', Δ'', Δ''', Δ^{IV}, si los

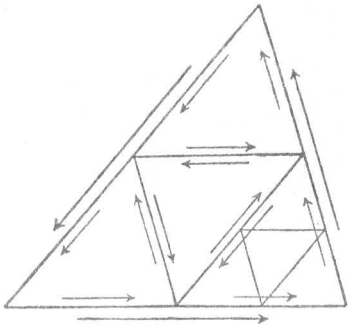

Fig. 1

suponemos recorridos todos en el sentido matemático positivo, será:

$$^{(\Delta)}\int = {}^{(\Delta')}\int + {}^{(\Delta'')}\int + {}^{(\Delta''')}\int + {}^{(\Delta^{IV})}\int,$$

puesto que al integrar siguiendo los contornos de los cuatro triángulos parciales (véase la fig. 1, en la cual se ha marcado *dentro* de cada uno de los triángulos, por medio de flechas, el

sentido de la integración), se han recorrido los tres segmentos auxiliares en los dos sentidos opuestos y, por tanto (véase § 14, 1.ª forma), la influencia de estas integraciones auxiliares ha quedado eliminada. Ahora bien, entre las cuatro integrales del segundo miembro debe haber una —cuya trayectoria de integración designaremos por Δ_1—tal que sea

$$\left|^{(\Delta)}\int\right| \leq 4\left|^{(\Delta_1)}\int\right|,$$

pues no puede ocurrir que cada una de las cuatro integrales sea mayor que la cuarta parte de la total. Aplicando el mismo razonamiento al triángulo parcial Δ_1, se obtiene otro triángulo parcial, Δ_2, para el cual es

$$\left|^{(\Delta_1)}\int\right| \leq 4\left|^{(\Delta_2)}\int\right|;$$

luego,

$$\left|^{(\Delta)}\int\right| \leq 4^2\left|^{(\Delta_2)}\int\right|.$$

Prosiguiendo del mismo modo, resulta una sucesión de triángulos Δ, Δ_1, $\Delta_2, \ldots$, $\Delta_n, \ldots$, semejantes entre sí, cada uno de los cuales está contenido en el anterior, del cual es cuarta parte, y, por consiguiente, se verifica:

$$\left|^{(\Delta)}\int\right| \leq 4^n\left|^{(\Delta_n)}\int\right| \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots$$

y, según el principio de encaje, existe un punto, z_0, y sólo uno, común a todos los Δ_n.

Sea, ahora, ε una magnitud positiva tan pequeña como se quiera. Como $f(z)$ debe tener un cociente diferencial en z_0, se podrá determinar $\delta > 0$ (véase § 10, 1.ª forma), de manera que para todo z, tal que $|z - z_0| < \delta$, sea

$$|f(z) - f(z_0) - (z - z_0)f'(z_0)| < \varepsilon\,|z - z_0|,$$

o bien,

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\, f'(z_0) + \eta(z - z_0),$$

siendo

$$|\eta| < \varepsilon.$$

Tomando n suficientemente grande para que Δ_n esté contenido por entero en el entorno de z_0 caracterizado por la condición $|z - z_0| < \delta$ y, por tanto, que para todo z contenido en Δ_n y en su contorno sea $|z - z_0| < \delta$, se verificará:

$$^{(\Delta_n)}\!\int f(z)\, dz = {}^{(\Delta_n)}\!\int f(z_0)\, dz - {}^{(\Delta_n)}\!\int z_0 f'(z_0)\, dz + {}^{(\Delta_n)}\!\int z f'(z_0)\, dz$$
$$+ {}^{(\Delta_n)}\!\int \eta \cdot (z - z_0)\, dz.$$

Según el § 14, 3 y la observación del final del artículo anterior, es, pues,

$$^{(\Delta_n)}\!\int f(z)\, dz = 0 + 0 + 0 + {}^{(\Delta_n)}\!\int \eta \cdot (z - z_0)\, dz,$$

y según § 14, 5, si se designa por s_n el perímetro de Δ_n,

$$\left| {}^{(\Delta_n)}\!\int f(z)\, dz \right| < \varepsilon \cdot \frac{s_n}{2} \cdot s_n = \frac{\varepsilon}{2} \cdot s_n^2,$$

puesto que por ser $|z - z_0|$ la distancia entre dos puntos del mismo triángulo, su máximo valor posible es $\frac{s_n}{2}$ y la longitud de la trayectoria de integración es $= s_n$, mientras que $|\eta| < \varepsilon$.

Además, de la semejanza de triángulos señalada se sigue, designando por s el perímetro del triángulo Δ,

$$s_1 = \frac{s}{2}, \qquad s_2 = \frac{s_1}{2} = \frac{s}{2^2}, \quad \ldots, \quad s_n = \frac{s}{2^n}$$

luego, finalmente:

$$\left| {}^{(\Delta)}\!\int f(z)\, dz \right| \leq 4^n \left| {}^{(\Delta_n)}\!\int f(z)\, dz \right| \leq 4^n \cdot \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{s^2}{4^n} = \frac{\varepsilon}{2} \cdot s^2.$$

El último miembro de esta expresión es un número que, escogiendo convenientemente ε, puede ser tan pequeño como se quiera; el primero, por el contrario, tiene un valor determinado, el de la integral; luego ésta necesariamente es nula, como queríamos demostrar.

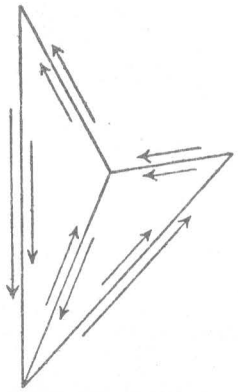

Fig. 2

Segunda parte: La trayectoria C es un polígono cerrado cualquiera, P, que, por consiguiente (como trayectoria cerrada), no se corta a sí mismo.

Si C es un cuadrilátero V, se le podrá descomponer siempre, por medio de una diagonal interior ($|$), en dos triángulos, Δ y Δ', y será (véase fig. 2):

$$^{(\Delta)}\!\int = {}^{(\Delta)}\!\int + {}^{(\Delta')}\!\int = 0.$$

Del mismo modo se puede proceder cuando se trate de otro polígono cualquiera: descompuesto, por medio de dia-

gonales interiores, en triángulos, se integra a lo largo de cada uno de éstos separadamente, con lo cual se obtienen otras tantas integrales nulas, y sumándolas, como a lo largo de cada integral se integra dos veces, una en cada sentido, la suma es igual a la integral tomada a lo largo del contorno del polígono; luego, también entonces, es

$$^{(P)}\int f(z)dz = 0.$$

Tercera parte: C es una trayectoria cerrada cualquiera.

En este caso, bastará probar que se puede encontrar un polígono, P, tal que se verifique:

$$\left|{}^{(C)}\int - {}^{(P)}\int\right| < \varepsilon,$$

por pequeño que sea el valor atribuído a ε; pues, entonces, según lo que acabamos de demostrar, también será:

$$\left|{}^{(C)}\int\right| < \varepsilon, \quad \text{es decir,} \quad {}^{(C)}\int = 0.$$

Partamos, para ello, de la definición

$$^{(C)}\int = \lim J_n = \lim \sum_{\lambda=1}^{n} (z_\lambda - z_{\lambda-1})\, f(\zeta_\lambda), \quad (z_0 = z_n),$$

y, fijado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, tomemos los puntos de división, z_λ, tan próximos entre sí y, por consiguiente, en número, n, tan grande que

1) constantemente sea $\left|{}^{(C)}\int - J_n\right| < \frac{\varepsilon}{2}$, lo que, según el teorema del § 12, siempre es posible;

2) las longitudes de todos los arcos parciales sean $< \frac{1}{2}\rho$, siendo ρ la magnitud determinada por L en G, según el teorema del § 7, — tal, pues, en particular, que el mismo P esté contenido totalmente en G;

3) estas longitudes sean también $< \delta$, siendo δ la magnitud determinada por el teorema de la convergencia uniforme, para la cual es

$$|f(z'') - f(z')| < \frac{\varepsilon}{2l}, \quad (l = \text{longitud de } C),$$

siempre que z' y z'' sean dos puntos cualesquiera de C o que, a lo más, disten $\frac{1}{2}\rho$ de C y tales que sea $|z'' - z'| < \delta$ —, es decir, que, en particular, si z es un punto cualquiera de la *cuerda* $z_{\lambda-1}\, z_\lambda$ se puede poner siempre:

$$f(z) = f(\zeta_\lambda) + \eta_\lambda, \quad \text{supuesto} \quad |\eta_\lambda| < \frac{\varepsilon}{2l};$$

4) el polígono, P, formado por las cuerdas que unen los vértices sucesivos, z_λ, $(\lambda = 0, 1, 2, \ldots)$, no se corta a sí mismo [1].

Así escogido P, si se integra a lo largo de cada uno de sus lados, resulta:

$$^{(P)}\int = \sum_{\lambda=1}^{n} \int_{z_{\lambda-1}}^{z_\lambda} f(z)dz = \sum_{\lambda=1}^{n} \int_{z_{\lambda-1}}^{z_\lambda} (f(\zeta_\lambda) + \eta_\lambda)dz$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{n} f(\zeta_\lambda) \int_{z_{\lambda-1}}^{z_\lambda} dz + \sum_{\lambda=1}^{n} \int_{z_{\lambda-1}}^{z_\lambda} \eta_\lambda dz = J_n + \sum_{\lambda=1}^{n} \int_{z_{\lambda-1}}^{z_\lambda} \eta_\lambda dz;$$

luego

[1] Esta condición no es esencial. Cuando no se cumple, el polígono se compone de un número finito de polígonos parciales que la satisfacen.

$$\left|{}^{(P)}\int - J_n\right| \leq \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2l} |z_\lambda - z_{\lambda-1}| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

y, en consecuencia,

$$\left|{}^{(C)}\int - {}^{(P)}\int\right| = \left|\left({}^{(C)}\int - J_n\right) - \left({}^{(P)}\int - J_n\right)\right|$$

$$\leq \left|{}^{(C)}\int - J_n\right| + \left|{}^{(P)}\int - J_n\right| \leq \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon,$$

y, por tanto, según la observación hecha al principio:

$${}^{(C)}\int f(z)dz = 0,$$

como se quería demostrar.

Esta tercera parte de la demostración, puede enunciarse brevemente diciendo: Puesto que la integral a lo largo de cualquier polígono es constantemente nula, y un contorno cualquiera, C, puede ser sustituído por uno poligonal inscrito, la integral a lo largo de C no puede tener otro valor que 0.

§ 17. Consecuencias sencillas y generalizaciones

1.ª Si G es un recinto *cualquiera*, en el cual es analítica $f(z)$, también es

$${}^{(C)}\int f(z)dz = 0,$$

siempre que C cumpla con la condición única de ser un contorno cerrado contenido en G y tal que no encierre ningún punto no perteneciente a G; pues toda la demostración dada para el teorema fundamental subsiste invariable en este caso.

2.ª Si C es un contorno cerrado, y acerca de la función $f(z)$ sólo se sabe que en cada punto del mismo contorno C y en todo el recinto encerrado por C es analítica, también, entonces, es

$${}^{(C)}\int f(z)dz = 0.$$

Demostración: Puesto que $f(z)$ es analítica en todo punto, z, de C, cada uno de estos puntos es centro de un entorno circular en el que $f(z)$ es analítica (véase § 10, pág. 45) y, según el teorema de Heine-Borel, basta un número finito de tales circunferencias para recubrir totalmente el contorno C. El recinto limitado por C, aumentado en los trozos convenientes de estos discos circulares, constituye un recinto simplemente conexo G, en el cual está contenido C y en el que $f(z)$ es analítica, con lo cual la aplicación a él del teorema fundamental demuestra el enunciado.

3.ª Consideremos un recinto, G, en el cual hay dos contornos cerrados, C_1 y C_2, que no se cortan y tales, además, que el C_1 encierra al C_2 y que el recinto comprendido entre ambos pertenece, por entero, a G; entonces — haya o no dentro de C_2 puntos fronteras de G — siempre es

$${}^{(C_1)}\int f(z)dz = {}^{(C_2)}\int f(z)dz.$$

Demostración: Unamos los contornos C_1 y C_2 por dos líneas auxiliares, c' y c'', contenidas en el recinto comprendido entre C_1 y C_2 y tales que no se corten. Queda así descompuesto este recinto en dos partes simplemente conexas, dentro de las cuales, lo mismo que en sus contornos, $f(z)$ es analítica. Ahora bien, según acabamos de ver, las integrales a lo largo de estos contornos son $= 0$; luego lo mismo ocurre a su suma, y como al hacer esta suma se puede prescindir de la consideración de las integrales a lo largo de

las líneas auxiliares, según lo dicho en el § 14, 1.°, suponiendo que C_1 y C_2 sean recorridos en sentido matemático positivo, queda:

$$^{(+C_1)}\int + {}^{(-C_2)}\int = 0, \quad \text{es decir,} \quad {}^{(C_1)}\int = {}^{(C_2)}\int,$$

como queríamos demostrar.

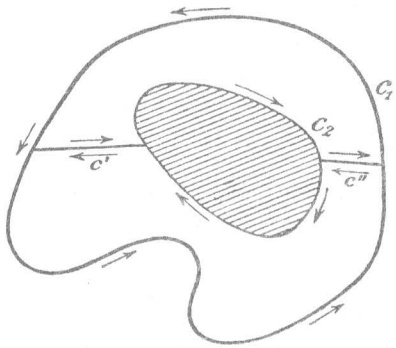

Fig. 3

Ejemplo. — Según el ejemplo 5.° del § 13, si C es una circunferencia de centro z_0 es

$$^{(C)}\int \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i.$$

Según el teorema que acabamos de demostrar, este mismo valor tiene la integral si C es una trayectoria cualquiera, sin puntos dobles, cerrada, que rodee una vez al punto z_0. — Cosa análoga se dice para todas las integrales del ejemplo 5.° del § 13.

4.° El mismo procedimiento de demostración se aplica al **Teorema:** Si $C_1, C_2, \ldots, C_m$ son trayectorias cerradas, que mutuamente se excluyen, contenidas en el recinto de contorno cerrado C_0, y $f(z)$ es uniforme y analítica en todos estos arcos y en el recinto comprendido por C_0, pero exterior a los encerrados por $C_1, C_2, \ldots, C_m$ (un recinto de esta

naturaleza se dice que es de un orden $m + 1$ de conexión), se tiene:

$$^{(C_0)}\int = {}^{(C_1)}\int + {}^{(C_2)}\int + \ldots + {}^{(C_m)}\int.$$

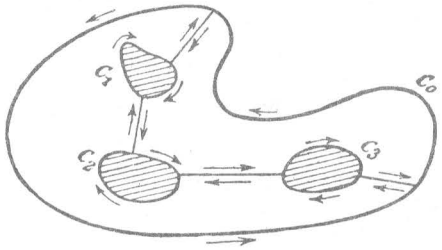

Fig. 4

La manera de demostrar este teorema, completamente análoga a la empleada en la propiedad anterior, está indicada en la fig. 4 por medio de flechas.

Ejemplo. — Por descomposición del integrando en sumandos, se obtiene:

$$^{(C)}\int \frac{2z - 1}{z^2 - z}\, dz = {}^{(C_1)}\int \frac{dz}{z} + {}^{(C_2)}\int \frac{dz}{z - 1} = 4\pi i,$$

si el contorno C encierra los puntos 0 y 1, mientras que el C_1 sólo encierra al 0 y el C_2 sólo al 1.

Teorema 5.°: *Si* f(z) *es una función continua en el recinto simplemente conexo G, y, cualesquiera que sean los puntos* z_0 *y* z de G, *la integral* (1)

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\, d\zeta$$

(1) En una integral definida puede, naturalmente, ser sustituída la letra que designa la variable independiente por otra cualquiera. Aquí, como muchas veces más adelante, se la representa por ζ, en tanto que z denota un punto arbitrario, pero fijo durante la integración.

es independiente de la trayectoria de integración, siempre que esté contenida en G [1], *su valor, supuesto fijo el límite inferior* z_0, *es una función analítica* F(z) *del límite superior, Z; y para todo* z *contenido en G es* F'(z) = f(z).

Demostración: Según las hipótesis hechas, $F(z)$ está determinada sin ambigüedad en todo G por la integral. Bastará, pues, demostrar que, para valores, z', suficientemente próximos a z, es

$$\left| \frac{F(z') - F(z)}{z' - z} - f(z) \right| < \varepsilon.$$

Puesto que z es un punto interior a G, también pertenece a G un cierto entorno de z, y en este entorno podemos suponer contenido z', en cuyo caso, según el § 14, 2.°, es

$$F(z') - F(z) = \int_z^{z'} f(\zeta)\, d\zeta,$$

y, por hipótesis, se puede tomar como trayectoria de integración una cualquiera, por ejemplo, la rectilínea. Pero entonces se puede poner

$$f(\zeta) = f(z) + \eta,$$

siendo para todo ζ del segmento zz',

$$|\eta| < \varepsilon,$$

siempre que se tome el entorno del punto z, en el que hemos situado z', suficientemente pequeño — puesto que la función es continua. Pero, en este caso, es

(1) Esto ocurre, por ejemplo., seguramente, cuando $f(z)$ es regular en G.

$$F(z') - F(z) = (z' - z)\, f(z) + \int_z^{z'} \eta\, d\zeta,$$

de donde, según el § 14, 5.°, se sigue

$$|F(z') - F(z) - (z' - z)\, f(z)| \leq \varepsilon\, |z' - z|$$

lo que demuestra el teorema.

Ejemplo. — Según este teorema, $\int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}$ es una función analítica en todo recinto simplemente conexo que contenga el punto + 1, pero no el 0, por ejemplo, en el semiplano «derecho» (véase § 1, *f*).

Problema. — Sea $f(z)$ una función analítica en G y supongamos conocida una función, $F(z)$, tal que en todo punto, z, de G sea

$$F'(z) = f(z).$$

Demostrar que, en tal caso, es

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\, dz = F(z_1) - F(z_0),$$

si z_0, z_1 y la trayectoria de integración están contenidos en G.

CAPÍTULO V

FÓRMULAS DE LAS INTEGRALES DE CAUCHY

§ 18. Fórmula fundamental

Fórmula de la integral de Cauchy: *En las mismas hipótesis formuladas en el teorema de Cauchy, y suponiendo que z es un punto interior a C, es*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int^{(C)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \text{ (1)}.$$

Este teorema expresa que si de una función se sabe que es analítica en un recinto G y se conocen sus valores a lo largo de un contorno cerrado, C, contenido en G, que no encierra ningún punto que no pertenezca a G, necesariamente de tal conocimiento se deducen los valores de la función en el interior de C. De aquí resulta la extraordinaria importancia de este teorema, el cual muestra que los valores de una función analítica están tan íntimamente ligados entre sí que los valores a lo largo del contorno determinan completamente los que tiene en el interior del recinto. Evidentemente, no podrá ocurrir nada parecido en las funciones más generales, y, por esto, más arbitrarias, definidas en el § 8.

(1) Véase pág. 76, nota al pie.

Demostración: Se tiene:

$$\frac{1}{2\pi i} \int^{(C)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int^{(C)} \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int^{(C)} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Según lo dicho en el § 14, 3.° y § 17, 3.°, la primera integral es $J_1 = f(z)$; en la segunda, J_2, lo dicho en el § 17, 3.° permite sustituir el contorno C por cualquier otro que encierre al punto z, por ejemplo, por un circulito, c, de centro z, de modo que será:

$$J_2 = \frac{1}{2\pi i} \int^{(c)} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Si ahora tomamos el radio, ρ, de c suficientemente pequeño para que todo punto ζ de c satisfaga a la condición

$$|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon,$$

siempre posible por la continuidad supuesta de $f(\zeta)$, según § 14, 5.°, será:

$$|J_2| \leq \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{\rho} \cdot 2\pi\rho = \varepsilon, \qquad \text{es decir,} \qquad J_2 = 0.$$

Resulta, pues, conforme a lo dicho,

$$J_1 + J_2 = \frac{1}{2\pi i} \int^{(C)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z).$$

§ 19. Derivadas de las integrales

Si $\varphi(z)$ es una función definida y continua *a lo largo* de una trayectoria cualquiera, L, la integral

$$(1) \qquad \frac{1}{2\pi i} \int^{(L)} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

tiene un valor determinado para cada valor de z no correspondiente a un punto de L y, por consiguiente, define una función uniforme, $f(z)$, en todos los puntos no situados en L. A esta función es aplicable el

Teorema 1.°: La función definida por la expresión (1) es analítica en todo recinto simplemente conexo que no contenga ningún punto de L, y su derivada está dada por la fórmula

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int^{(L)} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta. \tag{2}$$

Demostración: Según lo dicho en el § 10, 3.ª forma, tendremos que demostrar, una vez fijado z en G y supuesto que también los z_n estén en G y tiendan hacia z, que

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{f(z_n) - f(z)}{z_n - z} - \frac{1}{2\pi i} \int^{(L)} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \right\} = 0.$$

De (1) se deduce

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int^{(L)} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \text{y} \quad f(z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int^{(L)} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_n} d\zeta;$$

luego,

$$\frac{f(z_n) - f(z)}{z_n - z} = \frac{1}{2\pi i} \int^{(L)} \frac{\varphi(\zeta)}{z_n - z} \left[\frac{1}{\zeta - z_n} - \frac{1}{\zeta - z} \right] d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int^{(L)} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z_n)} d\zeta.$$

Designando por A_n la expresión entre llaves que figura en la fórmula que tratamos de demostrar, su valor, teniendo en cuenta estas últimas expresiones, es

Manuel Alberto del Castillo

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \int^{(L)} \varphi(\zeta) \left[\frac{1}{(\zeta - z)(\zeta - z_n)} - \frac{1}{(\zeta - z)^2} \right] d\zeta$$

$$= \frac{z_n - z}{2\pi i} \cdot \int^{(L)} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^2 (\zeta - z_n)} d\zeta.$$

Si ahora representamos por M un número positivo que no sea superado por la función

$$\left| \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^2 (\zeta - z_n)} \right|,$$

continua a lo largo de L, en ningún punto z (es fácil reconocer la existencia de un número M de estas condiciones), y por l la longitud de L, será:

$$|A_n| < \frac{1}{2\pi} M \cdot l \, |z_n - z|,$$

y, por tanto,

$$A_n \to 0,$$

como queríamos demostrar.

El resultado que expresa la fórmula (2) puede enunciarse sencillamente diciendo que la derivada de $f(z)$ se obtiene sin más que derivar respecto a z dentro del signo integral en la expresión que define la función.

De igual modo se demuestra que esto mismo se puede repetir cuantas veces se quiera, resultando así el siguiente

Teorema 2.°: La función $f(z)$ definida por la expresión (1) puede derivarse cuantas veces se quiera, y sus derivadas vienen expresadas por las fórmulas

$$f''(z) = \frac{2!}{2\pi i} \int^{(L)} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^3} d\zeta \tag{3}$$

y, en general [1],

$$(4) \qquad f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int^{(L)} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \quad (n = 1, 2, 3 \ldots)$$

Demostraremos tan sólo la fórmula (3). Aplicando la (2), tenemos:

$$B_n = \frac{f'(z_n) - f'(z)}{z_n - z} - \frac{2!}{2\pi i} \int^{(L)} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^3} d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int^{(L)} \varphi(\zeta) \left[\frac{1}{z_n - z} \left(\frac{1}{(\zeta - z_n)^2} - \frac{1}{(\zeta - z)^2} \right) - \frac{2}{(\zeta - z)^3} \right] d\zeta,$$

fórmula que equivale a la (3) si se demuestra que es $B_n \to 0$.

Ahora bien, el paréntesis cuadrado que figura en esta última integral es $= (z_n - z) \dfrac{3\zeta - z - 2z_n}{(\zeta - z)^3 (\zeta - z_n)^2}$ y, por consiguiente, si M_1 tiene, para este caso, la misma significación que M en el anterior, será

$$|B_n| \leq \frac{1}{2\pi} M_1 \cdot l \cdot |z_n - z|; \qquad \text{luego} \qquad B_n \to 0,$$

como se quería demostrar.

Estas propiedades nos permiten deducir otra, de gran importancia, de las funciones analíticas. Una función (uniforme) es analítica, según la definición dada, si es derivable una vez. En el caso de las funciones de variable real, esta circunstancia nada más dice acerca de la naturaleza de la derivada, la cual puede ni siquiera ser continua. En cambio, en las funciones analíticas de una variable compleja se verifica el siguiente importantísimo y fundamental

[1] La fórmula (4) contiene, como caso particular correspondiente a $n = 0$, la (1), si, como de ordinario se hace, se conviene en considerar $0!$ como símbolo de la unidad.

Teorema 3.°: Si una función de una variable compleja (uniforme) dada en un recinto G tiene en él una derivada, también tiene todas las derivadas de orden superior (y, por tanto, ella y todas sus derivadas son continuas).

Demostración: Si C es un contorno cualquiera cerrado, contenido en G y que comprende en su interior al punto z, según el teorema 1.°, como $f(z)$ es continua a lo largo de C, la función

$$\frac{1}{2\pi i} \int^{(C)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

es analítica en todo el recinto limitado por el contorno C y derivable en el mismo recinto indefinidamente. Pero, según la integral de Cauchy, demostrada en el § 18, esta función es la misma $f(z)$; luego, en efecto, es derivable indefinidamente dentro de C, y, como este contorno puede ser tomado arbitrariamente, la misma propiedad tiene la función en todo punto de G.

Corolario: Dentro de las mismas hipótesis en que se verifica la fórmula fundamental, son ciertas las fórmulas

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int^{(C)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

De este resultado fundamental se deduce también esta importante consecuencia:

Teorema de Morera: Si $f(z)$ es continua en el recinto simplemente conexo G y para toda trayectoria cerrada, C, contenida en G, es

$$^{(C)}\!\int f(z)\, dz = 0,$$

la función es analítica en G (teorema recíproco del de la integral de Cauchy).

Demostración: Procediendo de igual modo que al deducir la 2.ª forma de la 1.ª en que fué enunciado el teorema fundamental (§ 15), resulta aquí que

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$$

es independiente de la trayectoria de integración y, por tanto (véase el § 17, teorema 5.°), representa una función $F(z)$ analítica en G y tal que $F'(z) = f(z)$; pero, según lo que acabamos de ver, $F(z)$ tiene una segunda derivada, es decir, $f(z)$ es derivable en G, luego la función $f(z)$ es analítica en G.

Problema. — Demostrar las fórmulas (4) para $n = 3$ y, en general, para cualquier valor de n.

TERCERA PARTE

SERIES Y DESARROLLOS EN SERIE DE LAS FUNCIONES ANALÍTICAS

CAPÍTULO VI

SERIES DE TÉRMINOS COMPLEJOS VARIABLES

Como ya dijimos en la página 30, suponemos al lector familiarizado con la teoría de las series infinitas de términos complejos constantes. Ahora vamos a ocuparnos en el estudio, más general, de las series con términos variables.

§ 20. **Campo de convergencia**

Consideremos una sucesión infinita

$$f_0(z),\ f_1(z), \ldots,\ f_n(z), \ldots$$

de funciones cualesquiera (§ 8), y supongamos que haya puntos, z, que pertenezcan a los campos de definición de todas estas funciones. Si z es uno de tales puntos, puede ocurrir que la serie

$$f_0(z) + f_1(z) + f_2(z) + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$$

sea o no convergente. El conjunto de todos los puntos z para los cuales están definidos todos los sumandos y es conver-

gente la serie, se llama *campo de convergencia* de la serie propuesta, y lo designaremos siempre por la letra M.

Las series potenciales ordinarias corresponden a los casos particulares de ser

$$f_n(z) = a_n z^n \qquad \text{o} \qquad = a_n(z - z_0)^n.$$

La primera propiedad importante de estas series de potencias es la de tener como campo de convergencia un círculo de centro z_0 — el llamado *círculo de convergencia* — incluyendo ciertos puntos de la circunferencia.

Vamos a demostrar esta propiedad siguiendo un camino que, al mismo tiempo, nos dará el valor del radio del círculo de convergencia.

Consideremos, para ello, el conjunto (numerable) de los números reales (no negativos).

$$|a_0|, \ |a_1|, \ |\sqrt[n]{a_2}|, \ldots, \ |\sqrt[n]{a_n}|, \ldots$$

Este conjunto es, desde luego, acotado por la izquierda; y ahora vamos a demostrar que

1.° Si el conjunto no está acotado por la derecha, la serie $\Sigma\, a_n(z - z_0)^n$ no converge para ningún valor de z diferente del z_0.

Por el contrario, que si es acotado por la derecha y μ es su límite superior (§ 5), será:

2.° $r = \infty$ si es $\mu = 0$.

3.° $r = \dfrac{1}{\mu}$ si es $\mu > 0$.

Dando este significado a μ, se verifica, pues, el

Teorema de Cauchy-Hadamard: El radio de convergencia, r, de la serie potencial $\Sigma a_n(z - z_0)^n$ está dado por la fórmula

$$r = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\overline{\lim}|\sqrt[n]{a_n}|}$$

y la serie es *absolutamente* convergente si $|z - z_0| < r$, y divergente si $|z - z_0| > r$.

Demostración: Escribamos, para simplificar, z en lugar de $z - z_0$, para lo cual basta suponer $z_0 = 0$.

1.° Supongamos, en primer término, que la serie $\Sigma a_n z^n$ es convergente para un valor de $z = z_1$ diferente de 0; en este caso existe un número $K > 1$, tal que

$$|a_n z_1^n| < K \qquad \text{para todo} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

de donde, por ser $z_1 \neq 0$, se sigue:

$$|\sqrt[n]{a_n}| < \frac{\sqrt[n]{K}}{|z_1|} < \frac{K}{|z_1|},$$

es decir, que seguramente el conjunto es también acotado por la derecha, lo cual demuestra la primera parte del teorema.

2.° Si $\mu = 0$, la serie convergerá para *todo* $z = z_1$. Pero la condición $\mu = 0$ equivale a esta otra (véase § 5, página 24): para todos los valores suficientemente grandes de n, es

$$|\sqrt[n]{a_n}| < \varepsilon, \qquad \text{por ejemplo,} \qquad < \frac{1}{2|z_1|};$$

y entonces,

$$|a_n z_1^n| < \frac{1}{2^n},$$

de donde se infiere la convergencia absoluta de $\Sigma a_n z_1^n$, puesto que $\sum \dfrac{1}{2^n}$ es convergente.

3.° Finalmente, si μ es un número finito, diferente de cero, habrá que probar que $\Sigma a_n z^n$ es absolutamente con-

vergente para todo $z = z_1$ tal que $|z_1| < \frac{1}{\mu}$, y divergente para todo $z = z_2$, para el cual sea $|z_2| > \frac{1}{\mu}$.

Y, en efecto, para todos los valores suficientemente grandes de n es

$$|\sqrt[n]{a_n}| < \mu + \varepsilon, \quad \text{por ejemplo,} \quad < \frac{1 + |z_1|\mu}{2|z_1|},$$

puesto que esta fracción, por ser $1 > |z_1|\mu$, es realmente

$$> \frac{|z_1|\mu + |z_1|\mu}{2|z_1|} = \mu;$$

luego $= \mu + \varepsilon$; por consiguiente, será:

$$|a_n z_1^n| < \left(\frac{1 + |z_1|\mu}{2}\right)^n,$$

es decir, menor que la n-sima potencia de una fracción propia (por ser $|z_1|\mu < 1$), lo que demuestra la convergencia absoluta de la serie $\Sigma a_n z_1^n$.

De la misma manera se demuestra la divergencia de $\Sigma a_n z_2^n$, cuando es $|z_2| > \frac{1}{\mu}$.

Lo dicho no permite asegurar nada acerca del comportamiento de la serie en los puntos fronteras del círculo de convergencia, cuestión en la cual también hay que distinguir tres casos: por ejemplo, Σz^n no converge en ningún punto frontera del círculo de convergencia; $\sum \frac{z^n}{n^2}$ converge

en todos ellos, y $\sum \frac{z^n}{n}$ converge en algunos (pero no en todos) [1].

Cuando las funciones que constituyen la serie son de naturaleza más complicada, la determinación exacta del campo de convergencia tropieza las más de las veces con grandes dificultades.

Cualquiera que sea la naturaleza de las funciones que forman una serie, $\Sigma f_n(z)$, su suma, para cada punto del campo de convergencia, tiene un valor determinado; luego (§ 8) es una función definida para todos los puntos de M. La serie infinita es la ley que, según lo dicho en el § 8, define la función, lo cual suele expresarse diciendo: *La serie representa la función* f(z) *en el campo M, o la función* f(z) *puede desarrollarse en este campo en aquella serie*; por ejemplo, $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ representa en el círculo unidad la función $\frac{1}{1-z}$, o ésta es desarrollable en dicho campo en aquella serie.

Como quiera que ya hemos reconocido como especialmente dignas de mención las funciones continuas y derivables, surge en seguida la pregunta: ¿Cuándo son analíticas las funciones representadas por series?

Para poder darle una respuesta general es preciso introducir previamente el concepto de convergencia uniforme, a cuya exposición dedicaremos el artículo siguiente.

Problemas. — 1.° Determinar el radio de convergencia de la serie potencial $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, en los casos de ser:

$$\alpha)\ a_n = \frac{1}{n^n}, \qquad \beta)\ a_n = n^{\log n}, \qquad \gamma)\ a_n = \frac{n!}{n^n}.$$

---

[1] Para las tres series es $r = 1$.

2.º Determinar el campo de convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$, en los casos en que es:

$$\alpha)\quad f_n(z) = \frac{1}{n^z}, \quad \text{es decir,} \quad = e^{-z \log n} \ (\log n \text{ positivo})$$

$$\beta)\quad f_n(z) = \frac{z^n}{1 - z^n}.$$

En este problema se trata, por consiguiente, de determinar el campo de convergencia de las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1 - z^n}.$$

§ 21. Convergencia uniforme

Decir que la serie $\Sigma f_n(z)$ tiene el campo de convergencia M, equivale a decir: Si z_1 es un punto cualquiera de M, dado $\varepsilon > 0$ se puede determinar un número $n_1 = n_1(\varepsilon)$, tal que para *todo* $n \geq n_1$ y *todo* $p \geq 1$ sea:

$$|f_{n+1}(z_1) + f_{n+2}(z_1) + \ldots + f_{n+p}(z_1)| < \varepsilon .$$

Si en lugar de z_1 se toma otro punto z_2 de M, se obtendrá otro número n_2 de significación análoga a n_1 respecto de z_1, etc. Así, pues, una vez dado ε, a cada punto z de M corresponde un número entero, $n_z = n_z(\varepsilon)$, tal que cualquiera que sea el número de términos de la serie que se consideren posteriores al n-simo, su suma, para el valor atribuído a z, es de valor absoluto $< \varepsilon$. El valor de n_z — que, dados ε y z, supondremos el menor posible — es, por decirlo así, una medida de la rapidez de convergencia de la serie: si n_z es muy grande, la serie converge muy lentamente en el punto z, y recíprocamente.

Ahora bien, puede ocurrir que haya un número N mayor que todos los números n_z que corresponden a todos los z de

M, lo cual quiere decir que, en tal caso, de cualquier modo que se tomen n y p, si son $n \geq N$ y $p \geq 1$, para *todo* punto z de M será:

$$|f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \ldots + f_{n+p}(z)| < \varepsilon,$$

puesto que n es mayor que *cada uno* de los n_z. Lo que antes llamábamos medida de la convergencia de la serie tiene, pues, este carácter para todos los puntos del campo M, lo cual se expresa diciendo que entonces la serie **converge uniformemente** en M.

Podemos, pues, dar la siguiente

Definición: Se dice que la serie $\Sigma f_n(z)$ converge uniformemente en el campo M [1], si, dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existe **un** número entero y positivo $N = N(\varepsilon)$ tal, que para *todo* $n \geq N$, *todo* $p \geq 1$ y *todo* z de M, sea

$$(1) \qquad |f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \ldots + f_{n+p}(z)| < \varepsilon .$$

Como la serie es convergente en el punto z y se puede hacer crecer p más allá de todo límite, de esta definición se sigue que para todo z de M y todo $n \geq N$, si la serie es uniformemente convergente en M, debe conservarse

$$(2) \qquad \left|\sum_{\nu=n+1}^{\infty} f_\nu(z)\right| \leq \varepsilon .$$

Así, por ejemplo, según esto, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ no es uniformemente convergente en su campo de convergencia (el círculo unidad); pues, cualquiera que sea n, se puede hacer que $\sum_{\nu=n+1}^{\infty} z^\nu = \frac{z^{n+1}}{1 - z}$ sea tan grande como se quiera, sin más que tomar z en el segmento $(0, +1)$, suficientemente próximo a $+1$.

[1] De esta definición se deduce que sólo se puede hablar de convergencia uniforme en *recintos* o conjuntos *infinitos* de puntos, M, pero nunca en puntos aislados.

Este ejemplo muestra, al mismo tiempo, que una serie de potencias *no* necesita ser uniformemente convergente en todo su círculo de convergencia. Por el contrario, se verifica el

Teorema 1.°: *Una serie de potencias converge uniformemente en todo círculo concéntrico con el de convergencia y menor que éste.* — La uniformidad de la convergencia sólo puede desaparecer, por consiguiente, al acercarse al contorno.

Demostración: Sea $r > 0$ el radio de convergencia de la serie $\Sigma a_n(z - z_0)^n$, y designemos por ρ un número menor que r y por z un punto cualquiera, tal que sea $|z - z_0| \leq \rho$. Tendremos, entonces

$$\left|\sum_{\nu=n+1}^{n+p} a_\nu (z - z_0)^\nu\right| \leq \left|\sum_{\nu=n+1}^{n+p} |a_\nu| \rho^\nu\right.$$

para todos estos z. Pero como el punto $z = z_0 + \rho$ está en el interior del círculo de convergencia, la serie $\Sigma |a_n| \rho^n$ es convergente y, por tanto, dado $\varepsilon > 0$ se puede encontrar un número N tal que para todo $n \geq N$ y todo $p \geq 1$ sea

$$|a_{n+1}| \rho^{n+1} + \ldots + |a_{n+p}| \rho^{n+p} < \varepsilon ;$$

luego para *todo* $|z - z_0| \leq \rho$, *todo* $n \geq N$ y *todo* $p \geq 1$ será, también,

$$|a_{n+1}(z - z_0)^{n+1} + \ldots + a_{n+p}(z - z_0)^{n+p}| < \varepsilon ,$$

como queríamos demostrar.

Más general es el siguiente criterio:

Teorema 2.°: Si existen los números positivos $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n, \ldots$ tales que para *todos* los z de una parte, M', del campo de convergencia de la serie $\Sigma f_n(z)$, sea

$$|f_n(z)| \leq \gamma_n, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

y converja

$$\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n ,$$

la serie $\Sigma f_n(z)$ es uniformemente convergente en M'. **(Criterio de convergencia de Weierstrass).**

La demostración es análoga a la dada para el caso particular primeramente enunciado.

Problemas. — 1.° Estudiar la uniformidad de la convergencia de las series dadas en el § 20, problema 2.°

2.° Demostrar que la serie potencial $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ converge uniformemente en todo su círculo de convergencia.

§ 22. Series uniformemente convergentes de funciones analíticas

Suponemos que todas las funciones $f_n(z)$ que hayamos de considerar ahora son analíticas, y vamos a demostrar que la función representada por la serie también lo es. Dicho de modo más preciso:

Sea $f_0(z), f_1(z), \ldots$ una sucesión indefinida de funciones analíticas en el mismo recinto, G, y tales que la serie $\Sigma f_n(z)$ sea *uniformemente* convergente en todo recinto cerrado G' que sea parte del G (1). Entonces se verifican los tres teoremas siguientes:

Teorema 1.°: La serie representa una función, $f(z)$, continua en G.

(1) Es decir, en todo recinto cerrado G' que, junto con su contorno, pertenezca al G.

Teorema 2.°: Toda serie obtenida integrando término a término la dada a lo largo de una trayectoria, L, contenida en G, es convergente y representa la integral correspondiente de $f(z)$, lo cual puede expresarse diciendo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}^{(L)}\!\int f_n(z)\,dz \quad \text{es convergente e} \quad = {}^{(L)}\!\int f(z)\,dz.$$

Teorema 3.°: La función $f(z)$ es analítica en todo el recinto G; y toda serie que se obtenga derivando término a término p veces la dada es convergente en todo G — más aún, converge uniformemente en todo recinto cerrado, G', que sea parte del G — y representa la derivada correspondiente de $f(z)$; más breve:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(p)}(z) \quad \text{es convergente e} \quad = f^{(p)}(z).$$

Demostraciones: 1.° Supongamos dados $\varepsilon > 0$ y el punto z_0 de G. Bastará entonces demostrar que para todos los puntos, z, de G, suficientemente próximos al z_0, es

$$|f(z) - f(z_0)| = |\sum f_n(z) - \sum f_n(z_0)| < 3\varepsilon.$$

Y, en efecto, según lo dicho en el § 21, se puede determinar el número N de manera que, poniendo

$$\sum_{n=0}^{N} f_n(z) = A(z) \quad \text{y} \quad \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(z) = R(z),$$

para *todos* los puntos, z, de G sea:

$$|R(z)| \leq \varepsilon.$$

Limitándonos entonces a considerar los z contenidos en un entorno suficientemente pequeño de z_0, para que se verifique

$$|A(z) - A(z_0)| < \varepsilon,$$

(como $A(z)$, por ser suma de un número *finito* de funciones continuas, tiene este mismo carácter, seguramente existe tal entorno), será:

$$|\sum f_n(z) - \sum f_n(z_0)| \leq |A(z) - A(z_0)| + |R(z)| + |R(z_0)|$$
$$< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon,$$

como se quería demostrar.

2.° Reconocida ya la continuidad de $f(z)$, queda demostrado que existe siempre su integral, la cual, según el teorema 4.° del § 14, es

$${}^{(L)}\!\int f(z)\,dz = {}^{(L)}\!\int A(z)\,dz + {}^{(L)}\!\int R(z)\,dz;$$

pero, teniendo en cuenta el mismo teorema, también es

$${}^{(L)}\!\int A(z)\,dz = {}^{(L)}\!\int f_0(z)\,dz + {}^{(L)}\!\int f_1(z)\,dz + \ldots + {}^{(L)}\!\int f_N(z)\,dz;$$

luego, designando por l la longitud del arco L,

$$\left| {}^{(L)}\!\int f(z)\,dz - \sum_{n=0}^{N} {}^{(L)}\!\int f_n(z)\,dz \right| = \left| {}^{(L)}\!\int R(z)\,dz \right| \leq \varepsilon \cdot l,$$

lo cual demuestra, por poderse hacer εl tan pequeño como se quiera, sin más que elegir convenientemente ε, que

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}^{(L)}\!\int f_n(z)\,dz \quad \text{es convergente e} \quad = {}^{(L)}\!\int f(z)\,dz.$$

Se reconoce de paso que es suficiente que $\Sigma f_n(z)$ converja uniformemente a lo largo de L y, por consiguiente, puede enunciarse la siguiente generalización del citado teorema 4.° del § 14.

Teorema 4.°: Toda serie infinita (de funciones continuas) puede ser integrada término a término, siempre que cumpla la condición de ser *uniformemente* convergente a lo largo de la trayectoria de integración.

3.° Si C es un contorno cerrado contenido en G, la serie $\Sigma f_n(z)$ converge uniformemente a lo largo de C; por consiguiente, en virtud de lo que acabamos de ver, será:

$$^{(C)}\int f(z)\,dz = {}^{(C)}\int\left(\sum f_n(z)\right)dz = \sum {}^{(C)}\int f_n(z)\,dz\,;$$

luego $= 0$, puesto que, según el teorema de la integral de Cauchy, cada uno de los sumandos es nulo. Resulta, pues, aplicando el teorema de Morera, que, por ser C completamente arbitrario en G, la función $f(z)$ es analítica.

Si ahora designamos por G' un recinto cerrado que forme parte del G, se puede escoger C de modo que encierre a G' sin tener ningún punto común con este recinto, y, por tanto, que el extremo inferior, ρ, de las distancias de los puntos de C a los de G' se conserve positivo.

La expresión de la derivada de orden p, seguramente existente, será, pues, atendiendo a razones análogas a las antes empleadas:

$$f^{(p)}(z) = \frac{p!}{2\pi i}\,{}^{(C)}\int \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{p+1}}\,d\zeta$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p!}{2\pi i}\,{}^{(C)}\int \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{p+1}}\,d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(p)}(z)\,,$$

lo cual demuestra la segunda parte del teorema.

La convergencia uniforme (una vez fijado p) de la serie en G' es consecuencia inmediata de la limitación

$$\left|\sum_{\nu=n+1}^{n+r} f_\nu^{(p)}(z)\right| = \left|\frac{p!}{2\pi i}\,{}^{(C)}\int \frac{\sum_{\nu=n+1}^{n+r} f_\nu(\zeta)}{(\zeta - z)^{p+1}}\,d\zeta\right| \leq \frac{p!}{2\pi}\cdot l\,\frac{\varepsilon}{\rho^{p+1}}\,,$$

que se establece fácilmente.

Aplicacion a las series de potencias:

1.° Sea $f_n(z) = a_n(z - z_0)^n$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, con lo cual la serie $\Sigma f_n(z)$ que ahora nos ocupa es la potencial $\Sigma a_n(z - z_0)^n$. Si $r > 0$ es su radio de convergencia (§ 20) y tomamos ρ entre 0 y r $(0 < \rho < r)$, podemos considerar el círculo $|z - z_0| < r$ como recinto G y el círculo de centro z_0 y radio ρ como recinto parcial G'; luego se verifica el

Teorema 5.°: Una serie de potencias $\Sigma a_n (z - z_0)^n$ representa una función analítica en el interior del círculo de convergencia y sus derivadas se obtienen por derivación, término a término, de la serie propuesta y tienen el mismo radio de convergencia que ésta:

$$f^{(p)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-p+1)\,a_n(z - z_0)^{n-p}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)\ldots(n+p)\,a_{n+p}(z - z_0)^n$$

es convergente para $|z - z_0| < r$.

Caso particular es el de

$$f^{(p)}(z_0) = p!\,a_p\,,\quad a_p = \frac{1}{p!}f^{(p)}(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\,{}^{(C)}\int \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{p+1}}\,d\zeta,$$

siendo C la circunferencia $|z - z_0| = \rho$. De la última fórmula

se deduce, representando por M el máximo de $|f(z)|$ en $|z - z_0| = \rho$ (escribimos n en lugar de p), la llamada **limitación de Cauchy**, de uso muy frecuente:

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi\rho \cdot \frac{M}{\rho^{n+1}} = \frac{M}{\rho^n}.$$

Problema. — Investigar si las series dadas en el problema 2.º del § 20 representan funciones analíticas en sus campos de convergencia.

CAPÍTULO VII

DESARROLLO DE FUNCIONES ANALÍTICAS EN SERIES DE POTENCIAS

Los teoremas expuestos en el capítulo anterior demuestran que la propiedad de las series de potencias de representar funciones analíticas en su campo de convergencia corresponde a series mucho más generales, a saber: todas las uniformemente convergentes cuyos términos son funciones analíticas. Tal propiedad no puede, por consiguiente, justificar por sí sola que se tomen las series de potencias como base del estudio de las funciones analíticas; la que justifica esto es la propiedad recíproca, la de que toda función analítica es desarrollable en serie de potencias; lo que permite asegurar que el conjunto de todas las series posibles de potencias constituye el conjunto de todas las funciones analíticas imaginables.

§ 23. Demostración de la posibilidad del desarrollo

Teorema: Si $f(z)$ es una función analítica en un cierto recinto, G, y z_0 es un punto (interior) de G, siempre existe *una, y sólo una,* serie de potencias de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

que es convergente en un cierto entorno de z_0 y representa en él la función $f(z)$, siendo el coeficiente del término general de la serie

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0),$$

y círculo de convergencia el mayor de los círculos de centro z_0 en cuyos puntos, sin excepción, $f(z)$ es continua y diferenciable. **(Desarrollo de Taylor.)**

Demostración: Sea z un punto cualquiera interior a dicho círculo, cuyo radio designaremos por r; tendremos que probar que, siendo a_n de la forma indicada, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad \text{es convergente e} \quad = f(z).$$

Por ser $|z - z_0| = \rho < r$ se puede tomar ρ_1 de manera que sea $\rho < \rho_1 < r$. Designando entonces por ζ un punto cualquiera de la circunferencia k_1, de centro z_0 y radio r, será:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}};$$

y ésta es una serie geométrica uniformemente convergente, respecto a ζ, a lo largo de k_1 (§ 21, teorema 2.°), por ser

$$\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| = \frac{\rho}{\rho_1} < 1.$$

Otro tanto ocurre a la serie

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n.$$

Por consiguiente, si se integran los dos miembros a lo largo de k_1, la integración del segundo se podrá efectuar término a término, y, conforme a lo dicho en el § 22, teorema 2.°, podremos asegurar que la serie resultante es convergente. Resulta, pues, dividiendo por $2\pi i$:

$$\frac{1}{2\pi i} \int^{(k_1)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int^{(k_1)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n \, d\zeta;$$

luego, en virtud de los §§ 18 y 19,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \cdot (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

como se quería demostrar.

El desarrollo así obtenido es único, lo que se deduce inmediatamente del

Principio de identidad en las series de potencias: Si las dos series

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad \text{y} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n$$

tienen un radio de convergencia positivo y sus sumas toman los mismos valores para todos los puntos de un entorno de z_0 o, simplemente, para infinitos puntos del entorno, que tienen en z_0 un punto de acumulación, las dos series son idénticas.

Demostración: La sustitución $z = z_0$ pone inmediatamente en evidencia la igualdad $a_0 = b_0$. Si ahora suponemos ya demostrada la identidad de los m primeros coeficientes de ambos desarrollos, para todos aquellos infinitos puntos en los que las dos series son iguales será:

$$a_{m+1} + a_{m+2}(z - z_0) + \ldots = b_{m+1} + b_{m+2}(z - z_0) + \ldots$$

y haciendo tender z al punto de acumulación z_0, por representar las dos series funciones continuas (§ 9, 3.ª forma), resulta:

$$b_{m+1} = a_{m+1},$$

lo que demuestra la identidad de ambos desarrollos.

En las funciones de una variable real sólo es posible el desarrollo cuando la función admite derivadas de cualquier orden; pero aquí basta reconocer la existencia de la primera derivada.

Como ya se ha dicho, el desarrollo encontrado es convergente en el mayor círculo, M, de centro z_0, en todo cuyo interior es continua y diferenciable $f(z)$; de donde se sigue que en su circunferencia debe existir un punto, por lo menos, que no pertenezca al campo de convergencia de la serie [1]. Estos puntos se llaman *singulares* de la función (de ellos trataremos especialmente en la Parte IV), de modo que podemos decir:

Teorema 2.°: En la circunferencia del círculo de convergencia de una serie de potencias existe, por lo menos, un *punto singular* de la función analítica representada por la serie.

[1] Pues si todos los puntos de la circunferencia perteneciesen al campo de convergencia de $f(z)$, se podría considerar un círculo descrito en torno de cada uno de ellos que también perteneciese a dicho campo; entonces, aplicando el teorema de Heine-Borel, resulta que sería suficiente un *número finito* de estos círculos para recubrir la circunferencia del de convergencia, y esto exigiría que no fuese K el *mayor* círculo en cuyo interior fuese continua y diferenciable $f(z)$.

Ejemplo. — En el § 17, 4.° vimos que $f(z) = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}$ es una función analítica si z y la trayectoria de integración (por otra parte arbitraria) están en el semiplano derecho; por consiguiente, $f(z)$ debe admitir un desarrollo en serie de potencias, para el entorno del punto $+1$, por ejemplo, para el que r sea por lo menos $= 1$. Ahora bien, como son

$$f'(z) = \frac{1}{z}, \quad f''(z) = -\frac{1}{z^2}, \ldots, \quad f^{(n)}(z) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{z^n}, \ldots$$

resulta, para $z = z_0 = 1$,

$$a_0 = 0, \; a_1 = 1, \; a_2 = -\frac{1}{2}, \ldots, \quad a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \ldots;$$

luego será:

$$f(z) = (z-1) - \frac{1}{2}(z-1)^2 + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n + \ldots$$

y se ve que es precisamente $r = 1$ [1].

Para obtener el desarrollo de una función en serie de potencias, conviene muchas veces hacer uso del

Teorema de las series dobles de Weierstrass: Sean

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(n)}(z - z_0)^k, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

funciones analíticas, por lo menos para $|z - z_0| < r$, y supongamos que

$$\begin{aligned} F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) = {} & [a_0^{(0)} + a_1^{(0)}(z - z_0) + \ldots + a_k^{(0)}(z - z_0)^k + \ldots] \\ & + [a_0^{(1)} + a_1^{(1)}(z - z_0) + \ldots + a_k^{(1)}(z - z_0)^k + \ldots] \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + [a_0^{(n)} + a_1^{(n)}(z - z_0) + \ldots + a_k^{(n)}(z - z_0)^k + \ldots] \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

[1] Como el punto 0 es el único de la circunferencia del círculo de convergencia que *no* es interior al semiplano derecho, sólo él puede ser singular y, en virtud del teorema 2.°, *debe* serlo.

es uniformemente convergente para $|z - z_0| \leq \rho < r$. Entonces, las series formadas por los términos cuyos coeficientes están escritos en la misma columna son convergentes, y poniendo

$$a_k^{(0)} + a_k^{(1)} + \ldots + a_k^{(n)} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_k^{(n)} = A_k, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_k (z - z_0)^k$$

es convergente, por lo menos para $|z - z_0| < r$, e igual a $F(z)$ [1].

Demostración: Según lo dicho en el § 22, teorema 3.°, la función $F(z)$ es analítica para $|z - z_0| < r$ y, por consiguiente, desarrollable en este entorno en una serie de potencias, cuyo coeficiente de lugar k es

$$= \frac{1}{k!} F^{(k)}(z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f_n^{(k)}(z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_k^{(n)} = A_k,$$

lo cual demuestra el teorema.

Problema. — Desarrollar las series dadas en el § 20, problema 2.°, en series de potencias con el centro $z_0 = 2$, la primera, y con el $z_0 = 0$ la segunda.

§ 24. Consecuencias

Del teorema de Cauchy y del desarrollo de Taylor de una función analítica, al que hemos llegado partiendo de aquél, se deducen importantes consecuencias que vamos a examinar ahora, porque permiten reconocer lo verdaderamente característico de las funciones analíticas. Pero antes haremos algunas consideraciones preliminares.

[1] Es decir, que en las hipótesis hechas se pueden sumar término a término las infinitas series de potencias que constituyen $F(z)$.

Las funciones que corresponden al concepto más general, establecido en el § 8, son de tal manera arbitrarias que de su modo de ser en una parte de su campo de definición, nada se puede inferir acerca de cómo serán en otra. Por ejemplo, si M es todo el plano z y $f(z) = 3i$ para $|z| \leq 1$, nada se puede asegurar acerca de los valores de la función para $|z| > 1$; pues, para esta parte del campo, puede darse otra ley de determinación de la función. (Véase el ejemplo de la página 38.) Ya varía la cuestión si se impone a la función la condición de ser continua; entonces *es preciso*, en este último ejemplo, que los valores de $f(z)$ para puntos próximos al círculo unidad difieran poco de $3i$. Existe, pues, para la función una cierta sujeción: los valores de la función están ligados entre sí por una ley especial. Esta sujeción intrínseca que liga los diversos valores de la función y permite deducir, de modo más o menos aproximado, los valores de la función en una parte del campo de definición de los que tiene en otra parte del mismo, se acusa de modo tanto más fuerte cuanto más particular es la clase de funciones que, entre el conjunto de todas, se distinguen. Aclarará esto un ejemplo tomado de la teoría de las funciones de variable real x.

Limitándonos, por ejemplo, al estudio de las funciones racionales de tercer grado (de las curvas de tercer orden)

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3, \quad (a_\lambda,\ x,\ y \text{ reales}),$$

vemos que una función o curva de esta naturaleza está completamente determinada por muy pocas condiciones (datos). Así, si se sabe que la curva pasa por cuatro puntos determinados (es decir, si se conocen los valores de la función para

cuatro valores de x), la función queda, en general, completamente determinada, por muy próximos entre sí que se supongan los cuatro puntos dados. De la marcha de la función en un intervalo, tan pequeño como se quiera, puede, pues, deducirse la marcha de la curva, con todas sus propiedades ordinarias y singulares, en todo el plano xy. La clase de las funciones enteras racionales de tercer grado presenta, pues, una sujeción intrínseca muy grande que encadena, por decirlo así, unos con otros, a los valores de la función.

Es natural que en las aplicaciones de la matemática a las ciencias naturales se consideren preferentemente estas funciones regulares, ya que todos los fenómenos naturales gozan de esta misma regularidad.

Merece señalarse la circunstancia, verdaderamente notable, de que del conjunto de las funciones más generales de variable compleja se ha escogido una clase de funciones por la condición única de ser diferenciables, o, dicho de otro modo, *por la condición de regularidad*, y tales funciones, entre las cuales se cuentan casi todas las que se presentan en la práctica, por una parte aún son de carácter muy general, pero por otra tienen una sujeción intrínseca tan grande que de su modo de ser en una porción (por pequeña que sea) del plano z puede inferirse cómo son en todo el plano. Veremos, en efecto — y ya anticipamos con esto el resultado más importante — que una función analítica está completamente determinada con todas sus propiedades regulares u ordinarias y singulares cuando se conocen sus valores a lo largo de un trocito pequeño de arco cualquiera, lo que también puede enunciarse diciendo que dos funciones analíticas que coinciden en un arco de esas condiciones son completamente idénticas.

Una primera propiedad que ya marcaba esta dirección era la fórmula de Cauchy (véase lo dicho en la pág. 78), que permitía deducir los valores de la función en el interior

de un recinto cerrado, C, cuando se conocen los que tiene en los puntos de su contorno C.

El teorema del desarrollo en serie de las funciones nos permite ahora obtener, entre otras interesantes consecuencias, la propiedad que acabamos de indicar, y que por su gran importancia en la construcción de la teoría de funciones merece ser señalada, junto con el teorema de la integral de Cauchy, como una de los más fundamentales, a saber:

Principio de identidad en las funciones analíticas: Dos funciones analíticas en un recinto, G, cuyos valores son iguales en un entorno (por pequeño que sea) de un punto z_0, perteneciente a G, o, simplemente, a lo largo de un arco (por pepequeño que sea) que parte de z_0 o, aun menos, *en un conjunto infinito de puntos en el que z_0 es de acumulación*, son iguales en todos los puntos de G.

Demostración: En virtud del teorema del desarrollo, las dos funciones — que designaremos por $f_1(z)$ y $f_2(z)$ — son desarrollables para el punto z_0 como centro en series de potencias que, por lo menos, convergen en el mayor círculo, K_0, de centro z_0 contenido en G, y la aplicación del principio de identidad para las series de potencias permite, teniendo en cuenta las hipótesis hechas, deducir la identidad de ambos desarrollos; luego, en todo el círculo K_0, es $f_1(z) = f_2(z)$.

Sea, ahora, ζ un punto cualquiera de G, y vamos a demostrar que también es $f_1(\zeta) = f_2(\zeta)$. Para ello unimos (fig. 5) z_0 con ζ por medio de un arco, L, contenido en G, y designamos por ρ la magnitud determinada por el teorema del § 7. Dividamos el arco L por medio de los puntos

$$z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{m-1}, z_m = \zeta,$$

de manera que cada uno de los arcos parciales tenga una longitud $< \rho$, y haciendo centro en cada punto de división, z_λ, tracemos el mayor círculo posible contenido en G; sus radios serán todos mayores o iguales que ρ, y, por con-

siguiente, cada uno de los círculos contendrá el centro del siguiente, lo cual expresaremos brevemente diciendo que forman una *cadena de círculos*. Consideremos desarrolladas en series de potencias, para cada punto z_λ, las funciones $f_1(z)$ y $f_2(z)$, lo mismo que hicimos para el punto z_0. Ambos desarrollos coinciden, por lo menos, en el interior de K_λ;

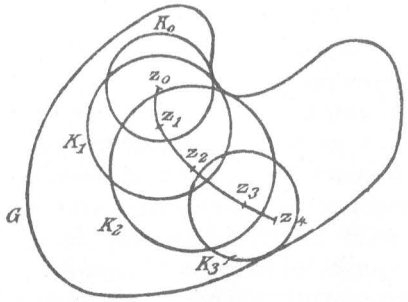

Fig. 5

pero como ya se había visto que eran idénticos en K_0, lo serán en el punto z_1 contenido en K_0, y *en su entorno*; luego, por virtud de la identidad de las series de potencias, también coinciden los desarrollos en K_1, y, por consiguiente, también las funciones son idénticas en z_2 *y su entorno*. Siguiendo reiteradamente este proceso llegaremos, pues, después de m operaciones, a la consecuencia que tratábamos de establecer: Las funciones coinciden en $z_m = \zeta$.

Este procedimiento de demostración suele llamarse, por la figura a que da origen, **método de la cadena de círculos**.

El próximo capítulo lo dedicaremos a exponer las consecuencias más importantes de este teorema, limitándonos por ahora a fijarnos en algunas muy simples, para cuya formulación haremos uso de la siguiente

Definición: Un punto, z_0, del campo de regularidad de una función, $f(z)$, en el cual es $f(z)_0 = 0$, se llama **punto cero** de la función. Más general: se llama *punto a* de la función el punto z_0 tal que es $f(z_0) = a$.

Teorema 1.º: Si $f(z)$ es una función analítica en G, en todo recinto cerrado, G', que forme parte de G sólo puede haber, cuando más, un número finito de puntos a, cualquiera que sea el número a, salvo el caso en que sea $f(z) = a$ en todo el recinto [1].

Demostración: Si $f(z)$ tuviese infinitos puntos a en G', estos puntos tendrían uno de acumulación, z_0, también contenido en G; pero la función que en todo el plano tiene el valor constante a, es analítica en todo el plano y, por consiguiente, en particular en G; luego tendría que coincidir con $f(z)$, según el principio de identidad.

Este resultado puede enunciarse en otra forma, que suele ser más cómoda para las aplicaciones, a saber:

Teorema 2.º: Si la función $f(z)$ es analítica en el punto z_0, existe siempre un entorno circular de centro z_0 suficientemente pequeño para que en todo él no haya otro punto diferente de éste en que la función tome el valor $f(z_0)$, salvo el caso en que en todos los puntos tenga el mismo.

Teorema 3.º: Si $f_1(z)$ y $f_2(z)$ son funciones analíticas en G y tienen, al igual que todas sus derivadas, los mismos valores en z_0, son idénticas.

Demostración: Efectuando los desarrollos de ambas funciones para el punto z_0, las series resultantes serán idénticas, puesto que sus coeficientes, aparte factores numéricos iguales, son las derivadas de las funciones en el punto z_0,

[1] En otros términos: En el campo de regularidad no puede haber nunca un punto de acumulación de puntos a; para que lo haya es preciso un punto singular de $f(z)$ o que sea constantemente $f(z) = a$, o también: en ningún entorno de un punto ordinario puede haber infinitos puntos a, salvo el caso de ser $f(z) = a$ en todos los puntos.

las cuales, por hipótesis, son iguales; por consiguiente, según el principio de identidad, las dos funciones son iguales en todo G.

Teorema 4.°: Si la función (no constante) $f(z)$ tiene un punto a en z_0, existe siempre un *número determinado, entero* y *positivo*, α, tal que la función

$$f_1(z) = \frac{f(z) - a}{(z - z_0)^\alpha}$$

es desarrollable, para un entorno de z_0, en una serie de potencias

$$f_1(z) = b_0 + b_1(z - z_0) + \ldots,$$

cuyo primer coeficiente es diferente de cero [1].

Demostración: En el desarrollo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, def (z), correspondiente al punto z_0, es $a_0 = a$, y uno, por lo menos, de los coeficientes siguientes no es nulo. Si a_α es el primero de estas condiciones, será:

$$f(z) - a = a_\alpha (z - z_0)^\alpha + a_{\alpha+1}(z - z_0)^{\alpha+1} + \ldots, \quad (a_\alpha \neq 0),$$

igualdad que demuestra el teorema.

Como última aplicación, demostremos el tan notable como importante

Teorema 5.°: Una función analítica, $f(z)$, no puede tener en ningún punto de su campo de regularidad un valor absoluto máximo [2], excepto en el caso de tener el mismo valor, $f(z_0)$, en todo el campo.

[1] Naturalmente, es $b_0 = a_\alpha$ y, en general, $b_\lambda = a_{\alpha+\lambda}$, $\lambda = 0, 1, 2, \ldots$ El número α recibe el nombre de *orden del punto a en* z_0. A cada punto corresponde, pues, un *orden entero determinado*.

[2] Es decir, que su valor absoluto sea mayor o igual que todos los de $|f(z)|$ en un entorno de z.

Demostración: En el entorno de z_0 se tiene:

$$f(z) = a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \ldots \quad (r > 0).$$

Entre los coeficientes que siguen al $a_0 = f(z_0)$ debe haber uno, al menos, diferente de 0; supongamos que el primero de ellos es el a_m $(m \geq 1)$, y pongamos:

$$a_0 = Ae^{i\alpha}, \; a_m = A'e^{i\alpha'}(A' > 0), \; z - z_0 = \rho e^{i\varphi}, \; (0 < \rho < r),$$

con lo cual será:

$$f(z) = Ae^{i\alpha} + A'e^{i\alpha'}\rho^m e^{im\varphi} + a_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + \ldots$$

Imponiendo ahora a φ la condición de ser $\alpha' + m\varphi = \alpha$ [1], tendremos:

$$\begin{aligned} f(z) &= (A + A'\rho^m)e^{i\alpha} + a_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + \ldots \\ |f(z)| &\geq A + A'\rho^m - (|a_{m+1}|\rho^{m+1} + \ldots) \\ &\geq A + \rho^m[A' - (|a_{m+1}|\rho + \ldots)]. \end{aligned}$$

La serie de potencias que figura dentro del paréntesis en esta última expresión, es una función continua de ρ; luego podrá escogerse un valor ρ_0 de tal manera que sea $(|a_{m+1}|\rho_0 + \ldots) < \frac{1}{2}A'$, y entonces, para todo ρ que cumpla la condición $0 < \rho < \rho_0$, será:

$$|f(z)| > A + \tfrac{1}{2}A'\rho^m > |f(z_0)|,$$

es decir, para *todos* los puntos, z, situados en una cierta recta que parte de z_0 y suficientemente próximos a éste es, en efecto, $|f(z)| > |f(z_0)|$.

[1] Es decir, entre todos los rayos que parten de z_0 escogemos uno determinado.

Problemas. — 1.° Si el contorno cerrado, C, está contenido en el campo de regularidad de $f(z)$, dentro del recinto que limita sólo hay un número finito de ceros (más general: puntos a) de $f(z)$.

2.° La función $\operatorname{sen} \frac{1}{1-z}$ es analítica dentro del círculo unidad y tiene en él infinitos ceros, $1 - \frac{1}{k\pi}$, $(k = 1, 2, \ldots)$, resultantes de $\frac{1}{1-z} = k\pi$. ¿Hay en ello contradicción con el teorema 1.°, o el problema 1.°? Explicar este hecho.

3.° Como adición al teorema 5.°, demostrar que $|f(z)|$ no puede tener en z_0 ningún mínimo diferente de cero y que ni $\mathcal{R}(f(z))$ ni $\mathcal{J}(f(z))$ pueden tener en dicho punto máximo ni mínimo.

CAPÍTULO VIII

PROLONGACIÓN ANALÍTICA Y DEFINICIÓN COMPLETA DE LA FUNCIÓN ANALÍTICA

§ 25. El principio de la prolongación analítica

Todas las consideraciones del capítulo anterior se resumen en el principio de identidad para las funciones analíticas: Si dos funciones de esta naturaleza coinciden en el entorno de un punto (o, simplemente, a lo largo de un arco, por pequeño que sea, o en ciertos conjuntos infinitos de puntos), son completamente idénticas.

Esto representa, como ya dijimos en la página 105, una extraordinaria sujeción intrínseca de la función: basta el conocimiento de sus valores en aquellos conjuntos de puntos para que la función quede determinada *por completo* (es decir, todo el conjunto de sus valores, con todas sus propiedades ordinarias y singulares).

Vamos a procurar ver con toda claridad en qué consiste esta propiedad de las funciones analíticas.

Para ello imaginemos dadas dos funciones $f_1(z)$ y $f_2(z)$, de las cuales la primera es analítica en un recinto G_1 y la segunda lo es en el G_2. Supongamos, además, que los recintos G_1 y G_2 tienen común uno, g (por pequeño que sea), pero sólo éste (véase la fig. 6, en la cual está rayado g), y, finalmente, que en todo g sea constantemente $f_1(z) = f_2(z)$.

En estas condiciones se verifica también que las dos funciones f_1 y f_2 se determinan recíprocamente, sin ambigüedad. En efecto, según el principio de identidad, aparte $f_1(z)$ no hay ninguna otra función que sea analítica en G_1 y tenga en g los mismos valores que la $f_2(z)$.

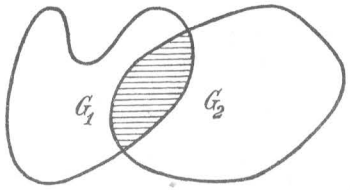

Fig. 6

La función $f_1(z)$ queda completamente determinada por estos valores en g (luego, en virtud de lo dicho, por $f_2(z)$): y, análogamente, $f_1(z)$ determina también completamente a $f_2(z)$.

Podemos, pues, decir: Si dos recintos G_1 y G_2 tienen la posición antes indicada, no existe ninguna función, o existe precisamente *una*, que sea analítica en G_2 y coincida con $f_1(z)$ en g.

Si existe una función $f_2(z)$ de esta naturaleza y ha sido determinada, se dice también que la función dada en G_1 ha sido prolongada analíticamente en G_2. Exactamente de la misma manera, la función $f_1(z)$ es la prolongación analítica de $f_2(z)$ en G_1. Por consiguiente, no hay ya motivo alguno para considerar $f_1(z)$ y $f_2(z)$ como funciones diferentes, sino que, más bien, la total determinación de cada una por la otra hace que deban considerarse las dos como *representaciones parciales* o *elementos* de una función única $F(z)$, que es analítica en el recinto total constituído por los G_1 y G_2.

Un ejemplo aclarará esto completamente: Sea G_1 el círculo unidad $|z|<1$ y G el círculo de centro i y radio $\sqrt{2}$, es decir, el $|z-i<\sqrt{2}$; ambos recintos tienen evidentemente uno, g, común (dejamos al cuidado del lector hacer la figura que lo evidencia). Supongamos dada en G_1 la función $f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^n$. ¿Existe una función analítica en G que coincida con la $f_1(z)$ en g? *Si existe una de estas condiciones, tiene que ser única.* La función $f_2(z)=\frac{1}{1-i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-i}{1-i}\right)^n$ es la buscada, pues esta serie es convergente para $\left|\frac{z-i}{1-i}\right|<1$, es decir, para $|z-i|<\sqrt{2}$, y se reconoce inmediatamente que los valores de las dos series de potencias son iguales en g, sin más que sumar cada una de ambas, lo que, dentro de sus círculos de convergencia, se hace fácilmente por tratarse de progresiones geométricas. (En los dos casos se obtiene para valor común en g la fracción $\frac{1}{1-z}$).

Resulta, pues, que $f_1(z)$ y $f_2(z)$ son prolongaciones analíticas recíprocas y son *elementos* de una misma función, $F(z)$, que es analítica en el recinto formado por los G_1 y G_2.

En este ejemplo sencillo hemos podido conocer explícitamente la función $F(z)$, que es $F(z)=1:(1-z)$. Pero, en general, esto no es posible, sino que $F(z)$ sólo es calculable por medio de sus elementos o representaciones parciales, a pesar de lo cual, y conforme a lo dicho en el § 8, puede decirse que es una función cuya ley de formación está dada por el *conjunto* de las diferentes representaciones parciales que determinan $F(z)$.

Resumiendo cuanto hemos obtenido, podemos enunciar el **Principio de la prolongación analítica:** Supongamos dada una función, $f_1(z)$, analítica en un campo, G_1, y sea G_2 otro campo que tenga común con el G_1 un recinto parcial, g, pero sólo éste. Entonces, *si existe* una función, $f_2(z)$, analítica en G_2 que coincida con $f_1(z)$ en g, esta función es *única*, y $f_1(z)$ y $f_2(z)$ se llaman prolongaciones analíticas una de otra y se comportan como representaciones parciales o elementos de

Manuel Alberto del Castillo

una misma función, $F(z)$, determinada por ambas y que es analítica en el recinto total.

Así enunciado este principio, surgen inmediatamente las siguientes cuestiones:

1) Dada una función analítica en un primer recinto, G_1, (por ejemplo, una serie de potencias en su círculo de convergencia), ¿cómo se reconoce si puede prolongarse esta función $f_1(z)$ en un recinto G_2, y cómo se encuentra la prolongación $f_2(z)$? Y en seguida:

2) ¿Existen otros recintos G_3, G_4,... cada uno de los cuales tenga con los anteriores una porción común, y hay en ellos funciones analíticas $f_3(z)$, $f_4(z)$,... que sean prolongaciones de las anteriores?

Caso afirmativo, todas estas funciones estarían completamente determinadas, sin ambigüedad, por la $f_1(z)$ y deberían, en consecuencia, ser consideradas como elementos de *una* función *única*. Y así surge todavía esta otra cuestión:

3) Dado un elemento de función, ¿cómo se encuentran todos los demás elementos, es decir, todas las prolongaciones en los recintos contiguos?

Este problema, muy vasto y aparentemente dificílisimo, tiene una solución muy sencilla — al menos teóricamente.

Antes de exponerla, cosa que haremos en el § 27, queremos examinar la prolongación analítica desde otro punto de vista.

Hasta ahora, en cuanto llevamos dicho, hemos utilizado el hecho de que una función analítica está completamente determinada en cuanto se conocen sus valores en un pequeño recinto parcial; bastaba, como dijimos, conocer los valores a lo largo de un arco tan pequeño como se quiera.

Imaginemos, pues, dado un arco de estas condiciones, L, y hagamos corresponder a cada uno de sus puntos, z, un valor de la función, $\varphi(z)$. Trazando un contorno G que contenga a L, nos encontramos en esta alternativa: o *no existe ninguna* función analítica, $f(z)$, que coincida con la $\varphi(z)$ a lo largo de L, o hay *sólo una* y, en este caso, queda completamente determinada por los valores a lo largo de L. Cuando esto se verifica, se dice también que la función dada a lo largo de L ha sido prolongada en el recinto G.

En particular, si L es un segmento del eje real, tal como el intervalo $x_0 \leq x \leq X$, y se designan por $\varphi(z)$ los valores de la función (que no necesitan ser reales) correspondientes a sus diferentes puntos, el problema será el de prolongar analíticamente una función (real o compleja) de la variable real x; cuando se logra esto se dice que se ha prolongado $\varphi(x)$ *en el campo complejo*; podemos, pues, enunciar este

Teorema: Si una función de la variable real x es prolongable analíticamente en el campo complejo, lo es de un solo modo.

La siguiente observación arroja abundante luz sobre la gran sujeción intrínseca de una función analítica:

Supongamos que L es el segmento real $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, G el círculo unidad, que contiene al segmento, y $\varphi(x)$ una función definida en L. Si ahora consideramos esta función sólo en el semiintervalo $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, el teorema anterior nos dice ya si, conocidos estos valores de la función, es prolongable o no $\varphi(x)$ en el círculo unidad. En el primer caso, los valores de la función $\varphi(x)$ están ya completamente determinados en la otra mitad del intervalo, es decir, en $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ por los de la primera mitad. No queda, pues, *libertad alguna* para elegir los valores de $\varphi(x)$ en la segunda mitad, si no se quiere hacer imposible la prolongación. El mismo proceso podemos repetir para la primera mitad, y luego para la cuarta parte, etc. En una palabra, la libertad de elección de los valores de la función, si no completamente ilusoria, por lo menos queda limitada a un número finito de puntos, puesto que, en virtud del principio de identidad, el conocimiento de los valores en infinitos puntos ya establece la posibilidad de la prolongación.

Problema. — ¿Es prolongable en el campo complejo la función real $F(x)$ definida para todos los valores reales, x, por $F(x) = +\sqrt{x^2}$ (es decir, igual al valor positivo de $\sqrt{x^2}$)?

§ 26. Las funciones llamadas elementales

Como complemento del teorema último se puede examinar ahora si las funciones más conocidas de una variable real son o no prolongables en el campo complejo y tratar, cuando ocurra lo primero, de encontrar la función que da la prolongación analítica.

1.° *Funciones racionales.* — Se reconoce inmediatamente que la función racional

$$\varphi(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_k x^k}, \quad (a_\lambda \text{ y } b_\lambda, \text{ complejos})$$

es prolongable y que

$$f(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \ldots + a_m z^m}{b_0 + b_1 z + \ldots + b_k z^k}$$

es la función que la prolonga en el campo complejo. Esta función $f(z)$ es analítica en todo el plano z, con excepción de los puntos en que se anula el denominador. (En el § 30 demostraremos que estos puntos son en número de k, a lo más).

2.° e^z, sen z, cos z. — La exponencial e^x y las funciones trigonométricas sen x y cos x están definidas, para valores reales de x, por las series

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Si en ellas hacemos la sustitución, meramente formal, de x por z, se obtienen las series

$$f_1(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

$$f_2(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

$$f_3(z) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!},$$

cada una de las cuales, teniendo en cuenta su naturaleza de series de potencias, representa una función analítica en todo el plano z. Como para $z = x$ coinciden con e^x, sen x y cos x, son las *prolongaciones* analíticas de estas funciones en el campo complejo. Por esto se sigue llamando a $f_1(z)$ función exponencial y representándola por e^z, y análogamente se usan las notaciones sen z y cos z para $f_2(z)$ y $f_3(z)$. En lo que sigue, supondremos conocidas las propiedades de estas funciones. El lector advertirá, por el contenido de este capítulo, que en la definición, en apariencia completamente arbitraria, de las funciones e^z, sen z y cos z, ya conocida desde los cursos elementales, hay, al tratarse de variable compleja, una *absoluta sujeción*; estas funciones sólo pueden ser definidas como funciones continuas y diferenciables de la manera que acabamos de hacerlo.

3.° Las prolongaciones de las funciones log x, a^x, $\sqrt[m]{x}$, entre otras, sólo pueden ser estudiadas después de que establezcamos completamente el concepto de función analítica, cosa que haremos en el artículo siguiente.

§ 27. Prolongación por medio de series potenciales y definición completa de función analítica

Vamos a ocuparnos ahora en el examen de las tres cuestiones planteadas en el § 25, todas las cuales pueden ser resueltas siguiendo el mismo procedimiento.

Sea $f_1(z)$ una función dada, analítica en G_1. Si z_1 es uno cualquiera de los puntos de G_1, tomándolo como centro, se podrá desarrollar la función en una serie de potencias

$$(1) \qquad f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)}(z - z_1)^n .$$

Si el radio de convergencia es $r_1 = \infty$, es decir, si la serie es convergente en todo el plano, se tiene resuelta la primera cuestión: *Existe* una función que da la prolongación analítica de $f_1(z)$ fuera de G_1: ésta es analítica en todo el plano y, por consiguiente, no puede haber *ninguna otra* función analítica que pueda ser obtenida como prolongación analítica de $f_1(z)$ que la definida por aquella serie de potencias, constantemente convergente.

Ejemplo. — Sean:

$$g(z) = 1 - \frac{z^2}{2} - \frac{2}{3!}z^3 - \ldots - \frac{n-1}{n!}z^n - \ldots = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{n!} z^n$$

(esta serie es convergente para todo valor de z);

$$h(z) = 1 + z + z^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

(esta serie sólo converge para $|z| < 1$); y pongamos en el círculo unidad

$$f_1(z) = g(z) \cdot h(z) .$$

Fuera del círculo unidad, estas fórmulas no definen ningún valor de la función. Desarrollando en serie las dos funciones, tomando como centro el punto $z_1 = 0$, se obtiene, después de efectuar el producto de las dos series [1]:

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_n}{n!},$$

que da el desarrollo de la función, válido para todo el plano.

[1] Téngase en cuenta que es $1 - \frac{1}{2!} - \frac{2}{3!} - \ldots - \frac{k-1}{k!} = \frac{1}{k!}$, $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

Si el radio r_1, de la serie (1) es finito ($y > 0$), tomemos como centro un punto, z_0, interior al círculo de convergencia y diferente de su centro. Entonces se puede poner el desarrollo

$$(2) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)}(z - z_2)^n, \quad \text{siendo} \quad a_n^{(2)} = \frac{1}{n!} f_1^{(n)}(z_2),$$

aplicable al punto z_2 como centro y que, en virtud del teorema 5.° del § 22, puede obtenerse directamente de (1).

El radio de convergencia de este desarrollo, r_2, es evidentemente $\geq r_1 - |z_2 - z_1|$ (es decir, por lo menos igual a la distancia del punto z_2 a la circunferencia).

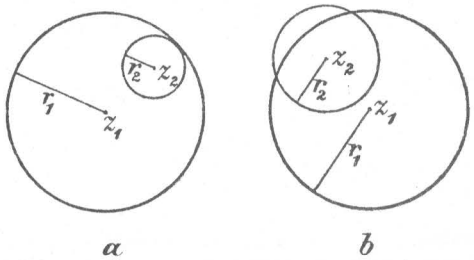

Fig. 7

Si el signo es el inferior (véase la fig. 7 *a*), la fórmula (2) da el valor de la función sólo para los puntos en los cuales ya la (1) los daría; por consiguiente, la (2) no nos dice nada nuevo [1]. Pero si el signo que debe tomarse es el superior (véase figura 7 *b*), el nuevo círculo de convergencia se extiende por fuera del antiguo, y la función $f_1(z)$ se ha prolongado en la dirección del radio $z_1 z_2$, fuera del antiguo círculo de convergencia.

[1] O mejor, nos dice que no, que el punto de contacto de las dos circunferencias *no* puede considerarse perteneciente al campo de regularidad; es, necesariamente, un punto *singular* de la función analítica definida por $f_1(z)$.

Luego, si es posible una prolongación en una dirección determinada, lo es por medio de este sencillo desarrollo en serie de potencias.

Imaginemos ahora el primer elemento de función prolongado en todas las direcciones posibles, y, análogamente, también prolongados en todas direcciones los nuevos elementos; así va formándose, partiendo del primer elemento, una función analítica en un recinto cada vez mayor.

Obsérvese, sin embargo:

1.° La prolongación de la primera serie puede ser imposible en todas las direcciones; entonces no hay ninguna función que sea regular en un recinto mayor que el primitivo círculo de convergencia; y se dice que la función *no es prolongable* y el círculo de convergencia es su *frontera natural.*

Ejemplo. — $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n!} = z + z^2 + z^6 + \ldots + z^{n!} + \ldots$ $r = 1$. Si esta función fuese prolongable fuera del círculo unidad, habría un cierto arco de su circunferencia compuesto exclusivamente de puntos ordinarios; pero en cada uno de los arcos de esta especie hay puntos (en número infinito) de la forma $z_0 = e^{2\pi i \frac{p}{q}}$ en que p y q son números enteros y positivos; y si demostrásemos que ningún punto de la forma z_0 puede ser ni siquiera punto de continuidad de $f(z)$, quedaría demostrada con ello la imposibilidad de la prolongación. Y, en efecto, dado g (entero y positivo), tan grande como se quiera, para $z = \varrho z_0$, siendo $0 < \varrho < 1$, es

$$f(z) = \sum_{n=1}^{q-1} z^{n!} + \sum_{n=q}^{\infty} \varrho^{n!},$$

puesto que para $n \geqq q$ es $z^{n!} = \varrho^{n!}$; luego, para $m = 2q + g$ será

$$|f(z)| > \sum_{n=q}^{m} \varrho^{n!} - \sum_{n=1}^{q-1} z|^{n!} > (m - q + 1)\,\varrho^{m!} - (q - 1).$$

Cuando $\varrho \to 1$, el último miembro tiende a $m - 2q + 2 = g + 2$, de manera que, eligiendo convenientemente ϱ_0, para todo $\varrho_0 < \varrho < 1$ necesariamente tendrá que ser $|f(z)| > g$; y como g era completamente arbitrario, resulta que moviéndose radialmente z, tendiendo a z_0, el valor de $|f(z)|$ crece más allá de todo límite y, por consiguiente, z_0 no puede ser punto de continuidad de la función.

2.° El otro caso extremo de que la serie pueda prolongarse por *todas partes* fuera del círculo de convergencia, no puede presentarse. Pues, según el teorema 2.° del § 23, en la circunferencia del círculo unidad hay un punto singular, al menos, que, por consiguiente, no puede estar en el interior de ningún nuevo círculo de convergencia, lo que forzosamente habría de ocurrir si la serie de potencias admitiera prolongación en todos sentidos. Esto es, por tanto, imposible.

3.° El método indicado para obtener la prolongación establece una clasificación de los puntos en dos clases: los *ordinarios* o *regulares* y los *singulares*, es decir, los que pueden quedar incluídos en un nuevo círculo de convergencia y aquellos otros para los que esto no es posible, en los cuales, por consiguiente, no puede definirse la función como continua y diferenciable. A todo punto ordinario le corresponde un valor de la función.

Según esto, podemos establecer la siguiente

Definición: *Se llama función analítica (completa) el conjunto de los valores funcionales,* w, *que de esta manera se hacen corresponder a todos los puntos ordinarios.*

El conjunto de todos los puntos ordinarios recibe el nombre de *campo, dominio* o *recinto* de *existencia*, de *continuidad* o de *regularidad* de la función analítica.

En atención a las sucesivas prolongaciones de la función partiendo de un elemento, se habla también de *figura analítica*, la cual, por consiguiente, comprende a todos los puntos ordinarios, z, cada uno de ellos unido al valor correspondiente, w, de la función. La *función* analítica puede decirse, con toda propiedad, que es el lazo que liga cada z con su w.

Esta definición, ya bastante completa, presenta, sin embargo, *dos lagunas*:

a) La necesidad de establecer ulteriores convenios para poder designar la naturaleza de la función en el infinito.

b) Puede presentarse el siguiente caso:

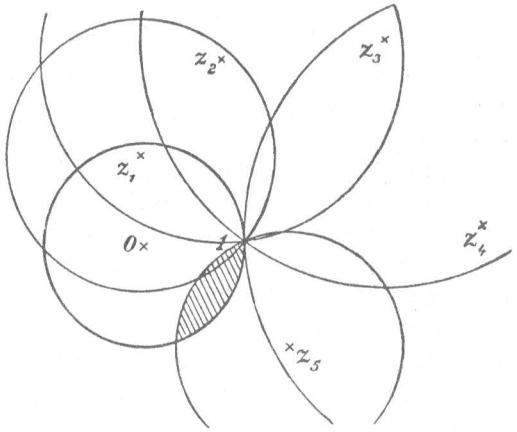

Fig. 8

Si después de varias prolongaciones se llega con el nuevo círculo de convergencia al primero (en la fig. 8, que corresponde a la hipótesis de ser el círculo unidad el primitivo círculo de convergencia y el punto $z = +1$ su único punto singular, el quinto de los nuevos círculos de convergencia alcanza al primitivo con el cual tiene común la porción que aparece rayada), puede ocurrir que la nueva serie de potencias haga corresponder a los puntos que ahora vuelven a ser considerados (su recinto está rayado en la figura) los mismos valores de la función que

antes les correspondían u otros nuevos valores [1]. En el primer caso, se llama la función *uniforme* (en el recinto en el cual ha sido prolongada), y en el segundo, *multiforme*.

Esta posibilidad podría haberse tenido en cuenta en la definición arriba establecida; no nos detendremos, sin embargo, a estudiar las consecuencias que de ello resultarían.

Problema. — El círculo unidad es el círculo de convergencia de la serie potencial $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^2}{n^2}$. Demostrar, por medio del desarrollo en una nueva serie de potencias, tomando como centro el punto $z_1 = +\frac{1}{2}$, que el punto $+1$ es un punto singular de la función representada por la serie en el círculo unidad.

(N. B. ¡A pesar de lo cual la serie es convergente para $z = +1$!).

§ 28. Ejemplos de funciones multiformes

La determinación efectiva (el medio de calcularla) de la figura analítica total, es decir, la distinción de todos los puntos z en ordinarios y singulares, y la asociación de los valores de la función a los z ordinarios, no puede realizarse, en general, aplicando el método indicado. El valor de este método estriba principalmente en que da idea del fondo de la cuestión; tiene, pues, el carácter de una demostración de existencia.

Los pocos ejemplos que ponemos a continuación, indican cómo se puede, en algunos casos, llegar al fin deseado.

1.º $$w = f(z) = \log z.$$

Ya hemos encontrado, en el § 17, 4.º, que

$$f(z) = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}$$

[1] Y aun puede imaginarse — y realmente *puede* ocurrir — que un punto interior al primer círculo de convergencia (por consiguiente, *ordinario*), al ser nuevamente considerado aparezca como *singular*.

es una función analítica en el semiplano derecho, caso de que también la trayectoria de integración esté contenida en dicho semiplano. Como para $x > 0$, el logaritmo natural puede definirse por la expresión

$$\log x = \int_1^x \frac{d\xi}{\xi},$$

se ve en seguida que $f(z)$ es la prolongación analítica de $\log x$ en el campo complejo puesto que, en efecto, para $z = x > 0$ es $f(z) = \log x$.

¿Cuál es el campo de existencia de $f(z)$ y cuál el conjunto de sus valores?

La integral de $f(z)$ tiene sentido cuando el arco de integración no contiene el punto 0. Por consiguiente (véase § 17, 5), la función $f(z)$ es analítica en todo el plano, excepto en el punto cero.

Pero esta función no es uniforme.

Para encontrar, por ejemplo, el valor de $f(-1) = \log(-1)$ se puede tomar como trayectoria de integración una vez la mitad superior del círculo unidad y otra vez la mitad inferior. Se obtiene así (véase § 13, ejemplo 1.º)

$$+\pi i \quad \text{y} \quad -\pi i,$$

respectivamente, lo que está de acuerdo con el resultado encontrado de que el valor de la integral, tomada a lo largo de toda la circunferencia en el sentido positivo, es $= 2\pi i$.

Ahora bien, según el teorema de Cauchy, la integral debía tener el mismo valor, cualquiera que fuese el camino recorrido, siempre que estuviese en el semiplano superior, en el primer caso, y en el inferior en el segundo; pero si se toma un arco que partiendo de $+1$ vaya al punto -1 después de dar m vueltas en torno del origen, en sentido positivo, se obtiene (véase el § 13, 1.º)

$$\log(-1) = \pi i + 2m\pi i,$$

por ser la integral a lo largo de una línea que da una vuelta alrededor del origen, igual a $2\pi i$; y del mismo modo, si las m vueltas son en sentido negativo,

$$\log(-1) = -\pi i - 2m\pi i.$$

Resulta, pues, que, según la trayectoria elegida, se obtienen para $\log(-1)$ infinitos valores, que tienen la forma

$$\log(-1) = \pi i + 2k\pi i, \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Se ve fácilmente que todo arco de integración que va de $+1$ a -1 es equivalente, según el teorema de Cauchy, a uno de la especie de los ahora considerados. Lo mismo que ocurre con el punto -1 ocurre, naturalmente, con cualquiera otro. Podemos, pues, decir:

La función $\log z$ es analítica en todo el plano, con excepción del punto cero; pero es infinitiforme, obteniéndose de cada valor de $\log z$ infinitos otros sin más que agregar al primero cualquier múltiplo de $2\pi i$. A cada uno de estos infinitos valores de $\log z$, así obtenidos, se le llama *una determinación* del logaritmo, en el punto z.

Cada una de estas determinaciones forma en el entorno de cada punto distinto del origen (más general: en cada recinto simplemente conexo, G, que no contiene el punto cero) una función analítica uniforme. El elemento de función uniforme formado por este conjunto de valores recibe el nombre de *rama* de la función multiforme.

En el § 23 vimos ya el desarrollo en serie de potencias de una de estas ramas (la correspondiente al llamado *valor principal*) de $\log z$, para el entorno del punto $+1$.

También partiendo de esta serie de potencias como primer elemento de función dado, se podría llegar, aunque de modo más enojoso, a las mismas propiedades, aplicando el método expuesto en el artículo anterior.

El punto 0, en cuyo entorno no es uniforme $\log z$ (y que es el único punto singular de $\log z$) se llama un punto de *ramificación* de $\log z$; en este caso es de *orden infinito* o de *infinitas hojas*.

Suponemos conocidas las propiedades de la función $\log z$, limitándonos aquí a insistir en que la multiformidad de $\log z$, que en las exposiciones elementales parece tener un carácter bastante arbitrario, es una propiedad *esencial* de esta función, que resulta de *absoluta necesidad*, según el principio de la prolongación, cualquiera que sea el elemento de que se parta.

Para cada una de las infinitas determinaciones de $\log z$ es $e^{\log z} = z$.

2.º $$w = f(z) = \sqrt[m]{z}.$$

También la función real y positiva, $\sqrt[m]{x}$, definida para todo $x > 0$, es prolongable en el campo complejo. Pues siendo $\log z$ función analítica en todo el plano z, salvo en el origen, lo mismo ocurre a la

$$f(z) = e^{\frac{1}{m}\log z},$$

aunque en el entorno del punto cero no sea función uniforme. Pero si escogemos un recinto simplemente conexo, G, que no contenga el punto cero

—por ejemplo, todo el plano, exceptuados los números reales $\leqq 0$ [1], — cada rama de $\log z$ es en él una función analítica uniforme. En particular, si tomamos la rama que da para $+1$ el valor 0 y, por consiguiente, para todo $x > 0$ es igual al valor real de $\log x$ (designaremos siempre este valor principal con la notación $\mathrm{L}\log x$), la función analítica en G

$$f_0(z) = e^{\frac{1}{m}\mathrm{L}\log z}$$

es la prolongación analítica buscada de la función real y positiva $\sqrt[m]{x}$, por ser $f_0(x) = e^{\frac{1}{m}\log x} = x^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{x}$. Por esta razón, designaremos la función $f(z)$ por $\sqrt[m]{z}$ y llamaremos a $f_0(z)$ valor principal de $\sqrt[m]{z}$.

Parece, según esta definición, que la función $\sqrt[m]{z}$ es infinitiforme; no es así, sin embargo, sino que tiene m determinaciones; pues, en efecto, todos los valores de $\log z$ están dados por la fórmula

$$\log z = \mathrm{L}\log z + 2k\pi i, \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

y, por consiguiente, es

$$f(z) = \sqrt[m]{z} = e^{\frac{1}{m}\mathrm{L}\log z} \cdot e^{\frac{2k\pi i}{m}} = e^{\frac{2k\pi i}{m}} \cdot f_0(z),$$

y el factor que está multiplicado por $f_0(z)$ tiene sólo m determinaciones [2], porque dos valores de k que difieran en un múltiplo de m le hacen tomar el mismo valor; las m ramas de $\sqrt[m]{z}$ se diferencian, pues, de la rama principal tan sólo en factores constantes. Haciendo que k tome los valores $0, 1, 2, \ldots, m-1$ se obtienen, por tanto, como representaciones de las m ramas

$$f_k(z) = e^{\frac{2k\pi i}{m}} e^{\frac{1}{m}\mathrm{L}\log z}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, m-1.$$

Podemos, pues, decir:

1) $\sqrt[m]{x}$ es prolongable en el campo complejo.

2) La función analítica uniforme representada por $\sqrt[m]{z}$ es regular en todo el plano, excepto en el origen.

---

[1] Este campo recibe el nombre de plano «*cortado*» *a lo largo del eje real negativo.*

[2] Son las m raíces m-simas de la unidad, por ser $\left(e^{\frac{2k\pi i}{m}}\right)^m = e^{2k\pi i} = +1$.

3) Esta función es, sin embargo, m-forme. El punto 0 es el único de ramificación y lo es de m hojas [1]. En cada prolongación analítica alrededor de él la función viene multiplicada por una raíz m-sima de la unidad. Siempre es $\left(\sqrt[m]{z}\right)^m = z$.

Como antes, supondremos también conocidas las propiedades elementales de la función $\sqrt[m]{z}$, por lo cual nos limitamos a estas pocas explicaciones acerca de su naturaleza analítica.

Problemas. — 1.º Desarrollar el valor principal de $\sqrt[m]{z}$, para el entorno del punto $+1$, en una serie de potencias; considerando, especialmente, el caso $m = 2$.

2.º La función exponencial general a^z, en la que a es una constante cualquiera, se define por el convenio

$$a^z = e^{z \log a}.$$

Estudiar esta función. — ¿Qué significa, según esto, i^i?

---

[1] Se dice también que es de orden $m-1$, porque el caso de $m = 2$ es, evidentemente, el primero en que aparece la multiformidad.

CAPÍTULO IX

FUNCIONES TRASCENDENTES ENTERAS

§ 29. Definición

Según lo dicho en el capítulo anterior, aparecen como las más sencillas las funciones cuyos desarrollos en series de potencias son convergentes en todo el plano, por ser funciones analíticas en todo él y porque el valor de la función correspondiente a cada valor de z viene dado por el desarrollo en serie, que podemos suponer en la forma

$$w = f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Por consecuencia, estas funciones son necesariamente uniformes.

Se les llama, simplemente: **funciones enteras**, y se clasifican en *trascendentes enteras y racionales enteras*, según que entre los coeficientes del desarrollo, a_n, haya o no infinitos diferentes de cero. En el último caso, si a_m es el último coeficiente no nulo, su índice, m, se llama *grado* de la función.

Ejemplos de funciones enteras son e^z, sen z y cos z.

Los teoremas de los artículos que siguen dan a conocer las propiedades características de estas funciones.

Si $f(z)$ tiene el mismo valor, c, para todos los de z, la función $f(z)$ es, sin duda, una función entera (función entera racional de grado 0), pero representa una forma degenerada de tales funciones y a ella no son aplicables los siguientes teoremas.

§ 30. Comportamiento para valores muy grandes de $|z|$

1.° **Teorema de Liouville:** Toda función entera (no constante) puede tomar fuera de cada círculo valores tan grandes como se quiera; es decir, si R y G son números arbitrarios (grandes) positivos, existen puntos, z, para los cuales es

$$|z| > R \quad \text{y} \quad |f(z)| > G.$$

Demostración: En efecto, si el teorema fuese falso, podríamos poner en la limitación $|a_n| \leq M : \rho^n$, demostrada al final del § 22, en lugar de M el número fijo G y en lugar de ρ un número arbitrario tan grande como se quisiera, lo cual exigiría que para $n = 1, 2, \ldots$ fuese necesariamente $a_n = 0$. Dicho de otro modo: una función entera *acotada* (1) se reduce necesariamente a una constante.

2.° Si, en particular, se trata de una función entera racional, aun puede precisarse más el teorema anterior, del siguiente modo:

Teorema 2.°: Si $f(z)$ es una función entera *racional* de grado m ($m \geq 1$), y G es un número positivo arbitrario, se puede encontrar uno R tal, que para todos los $|z| > R$ sea siempre $|f(z)| > G$.

(1) Se dice que una *función* es acotada en un recinto cuando es acotado el conjunto de sus valores en él.

Demostración: Se tiene

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_m z^m = z^m\left[a_m + \frac{a_{m-1}}{z} + \ldots + \frac{a_0}{z^m}\right];$$

luego, poniendo $|z| = r$, será:

$$|f(z)| \geq r^m\left[|a_m| - \frac{|a_{m-1}|}{r} - \ldots - \frac{|a_0|}{r^m}\right],$$

que, por ser $a_m \neq 0$, para todos los valores suficientemente grandes de r es mayor que $\frac{1}{2}|a_m| r^m$, luego $> G$ (más aún, $> G\, r^{m-1}$).

3.° De estos teoremas se deduce una demostración muy sencilla del

Teorema fundamental del Algebra: Si $f(z)$ es una función racional entera de grado $m \geq 1$, la ecuación $f(z) = 0$ tiene una raíz al menos. Más breve: $f(z)$ tiene puntos cero.

Demostración: Si siempre fuese $f(z) \neq 0$, también la función $\frac{1}{f(z)} = g(z)$ sería entera (no constante) y, por consiguiente, según el teorema de Liouville, fuera de cada círculo habría siempre puntos z para los que fuese, por ejemplo:

$$|g(z)| > 1, \quad \text{luego} \quad |f(z)| < 1,$$

resultado en contradicción con el teorema 2.° que acabamos de demostrar.

(Las funciones *trascendentes* enteras no necesitan tener ceros: por ejemplo, e^z es una función entera sin ningún punto cero).

4.° Si, por el contrario, se aplica el teorema de Liouville a una función entera trascendente, se puede precisar más diciendo:

Teorema 4.°: Si $f(z)$ es una función trascendente entera y se dan arbitrariamente $G > 0$, $R > 0$ y el número entero $m > 0$, existen siempre puntos, z, para los cuales es

$$|z| > R \quad \text{y} \quad |f(z)| > G \cdot |z|^m,$$

es decir, $f(z)$ se hace, en ciertos puntos exteriores a cada círculo, mayor que toda potencia de $|z|$, por grande que sea.

Demostración: Lo mismo que en el teorema 1.°, si el teorema fuese falso, se tendría:

$$|a_n| \leq \frac{G}{\rho^{n-m}},$$

de donde se deduce que, para $n > m$, necesariamente había de ser $a_n = 0$, es decir, $f(z)$ se reduciría a una función racional entera de grado no superior a m si se conservase siempre $|f(z)| \leq G\,|z|^m$ para todo $|z| \geq R$. Se puede, pues, enunciar este teorema en esta otra forma:

Si existen los números $G\ (> 0)$ y $m\ (\geq 0)$, tales que para todo $|z| > R$, siempre sea

$$|f(z)| \leq G\,|z|^m,$$

$f(z)$ es una función racional entera de grado no superior a m.

5.° De estos teoremas se deduce el notable

Teorema de Cassorati-Weierstrass: Toda función trascendente entera toma fuera de *cada* círculo valores tan *próximos* como se quiera a *cualquier* número dado. Dicho de otro modo: Dados arbitrariamente el número complejo c y los números positivos ε y R, se puede escoger z de modo que, siendo $|z| > R$, se verifique la condición [1]

$$|f(z) - c| < \varepsilon.$$

Demostración: a) Si $f(z)$ tiene *infinitos* puntos c, según el teorema 1.° del § 24, todos ellos no pueden estar contenidos

[1] Aun en otros términos: el conjunto de los valores que toma $f(z)$ fuera del círculo $|z| = R$ es denso en todo el plano, cualquiera que sea el valor atribuído a R.

en el círculo $|z| = R$; luego, fuera de éste, queda satisfecha la condición $|f(z) - c| = 0$.

b) Si $f(z)$ no tiene *ningún* punto c, la función $\frac{1}{f(z) - c} = f_1(z)$ también es entera (no constante); luego, según el teorema 1.°, se puede determinar z con la condición $|z| > R$, de manera que sea $|f_1(z)| > \frac{1}{\varepsilon}$, es decir, $|f(z) - c| < \varepsilon$.

c) Si $f(z)$ tiene un número *finito* de puntos c, podemos designarlos por $z_1, z_2, \ldots, z_n$ y sus órdenes por $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Entonces (véase § 24, teorema 4.°)

$$\frac{f(z) - c}{(z - z_1)^{\alpha_1}(z - z_2)^{\alpha_2} \ldots (z - z_k)^{\alpha_k}} = f_1(z)$$

es también una función entera, pero *sin* ceros; por consiguiente, $\frac{1}{f_1(z)} = f_2(z)$ es función entera y, seguramente, *trascendente*. Por tanto, según el teorema 4.°, para ciertos puntos exteriores a cualquier círculo dado, queda satisfecha la condición

$$(1) \qquad |f_2(z)| > \frac{2}{\varepsilon} \cdot |z|^m,$$

en la cual es $m = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k$, y, por consiguiente:

$$|f(z) - c| < \frac{\varepsilon}{2} \left| \frac{(z - z_1)^{\alpha_1} \ldots (z - z_k)^{\alpha_k}}{z^m} \right|.$$

Pero como para valores suficientemente grandes de z, por ejemplo, para todos los $|z| > R_1 > R$, es

$$(2) \qquad \left| \frac{(z - z_1)^{\alpha_1} \ldots (z - z_k)^{\alpha_k}}{z^m} \right| < 2,$$

resulta que, suponiendo también en (1) $|z| > R_1$, para estos z se verifican las relaciones (1) y (2) y, en consecuencia, también la

$$|f(z) - c| < \varepsilon.$$

Problema. — Se demuestra el último teorema más sencilla y rápidamente utilizando el desarrollo de Laurent, contenido en los § 31 y 32, de la función

$$\frac{1}{f(z) - c}$$

para valores grandes de $|z|$.

CUARTA PARTE

DE LOS PUNTOS SINGULARES

CAPÍTULO X

DESARROLLO EN SERIE DE LAURENT

§ 31. El desarrollo

Hasta ahora nos hemos ocupado exclusivamente en el estudio de las funciones en campos en que son analíticas. Ahora vamos a considerar el caso en que en el recinto existen también puntos singulares, pero suponiendo, siempre, que se trata de funciones uniformes.

Para fijar más las ideas, supondremos que la función $f(z)$ es uniforme y regular en una corona circular de centro z_0, sin que sepamos nada acerca de su comportamiento fuera del círculo mayor, K_1, de radio r_1, ni dentro del menor, K_2, de radio r_2.

El problema que ahora nos proponemos resolver es el de encontrar un desarrollo en serie que, para todo punto, z, de la corona, tal, por consiguiente, que $r_1 > |z| = \rho > r_2$, sea convergente y represente la función $f(z)$. Para ello tomemos dos círculos C_1 y C_2 de centro z_0 y radios ρ_1 y ρ_2, tales que sea

$$r_1 > \rho_1 > \rho > \rho_2 > r_2.$$

Ambas circunferencias y la corona comprendida entre ellas están dentro de la corona primitiva; luego la función es analítica en dicha corona y en las circunferencias que la limitan. Tracemos dos líneas auxiliares que unan C_1 y C_2 (por ejemplo, dos radios); procediendo entonces como hicimos en el § 17, 3, se obtiene:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int^{(C_1)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int^{(C_2)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta,$$

suponiendo orientadas en sentido positivo las dos circunferencias C_1 y C_2. Recordando ahora la demostración del § 23, tendremos:

a) Para la primera integral: como aquí ζ es un punto de la circunferencia C_1,

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0}\,\frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}},$$

es una serie uniformemente convergente para todo ζ en C_1, por ser $\left|\dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right| = \dfrac{\rho}{\rho_1} < 1$.

b) Para la segunda integral: como ahora ζ está en C_2,

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z - z_0}\cdot\frac{1}{1 - \dfrac{\zeta - z_0}{z - z_0}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}},$$

es una serie uniformemente convergente para todo ζ en C_2, por ser $\left|\dfrac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right| = \dfrac{\rho_2}{\rho} < 1$.

Sustituyendo estos desarrollos particulares de $\dfrac{1}{\zeta - z}$ en las integrales y observando que por ser ambos desarrollos

uniformemente convergentes (respecto de ζ) pueden ser integrados término a término, se obtiene:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int^{(C_1)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n d\zeta$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int^{(C_2)} \frac{f(\zeta)\,(\zeta - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} d\zeta,$$

y poniendo, para abreviar,

$$\frac{1}{2\pi i} \int^{(C_1)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = a_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int^{(C_2)} f(\zeta)\,(\zeta - z_0)^{n-1} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int^{(C_2)} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} = a_{-n},$$

$$(n = 1, 2, \ldots)$$

resulta:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n},$$

que suele escribirse, más brevemente, en esta otra forma:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Hemos obtenido, pues, una representación de $f(z)$ como suma de dos series de potencias, crecientes en la una y decrecientes en la otra, y ambas convergentes si z está en la corona comprendida entre las circunferencias K_1 y K_2, pues se reconoce inmediatamente que los coeficientes a_n y a_{-n} son independientes de las trayectorias de integración de las integrales que las definen (por consiguiente, de ρ_1 y ρ_2, respectivamente); según el § 17, 3, cada una de las líneas C_1 y C_2 puede ser sustituída por otra cerrada cualquiera que esté contenida por entero en la corona determinada por K_1 y K_2 y que rodee una vez a K_2.

La serie obtenida se llama **desarrollo de $f(z)$ en serie de Laurent** para el recinto constituído por la corona circular.

§ 32. Aclaraciones y ejemplos

Para mejor comprender la fórmula obtenida en el artículo anterior, consideremos separadamente las funciones representadas por las dos sumas Σ_1 y Σ_2. La

$$f_1(z) = \Sigma_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

es una serie ordinaria de potencias de $z - z_0$, convergente, por tanto, para todo z de K_1, y representa un función analítica en este círculo. La

$$f_2(z) = \Sigma_2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n},$$

se reconoce en seguida que es también una serie ordinaria de potencias; para verlo, basta poner

$$a_{-n} = b_n \quad \text{y} \quad (z - z_0)^{-1} = z',$$

con lo cual resulta:

$$f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z'^n.$$

Como Σ_2 seguramente converge para $r_2 < |z - z_0| < r_1$, esta nueva serie también converge, con seguridad, para

$$\frac{1}{r_1} < |z'| < \frac{1}{r_2};$$

luego, como es una serie ordinaria de potencias de z', para todo $|z'| < \frac{1}{r_2}$ representa una función analítica de z'; y deshaciendo la transformación, resulta que Σ_2 es convergente para *todos* los z tales que

$$|z - z_0| > r_2, \quad \text{es decir, en toda la región } \textit{exterior a } K_2,$$

y representa una función analítica de z en toda esta región.

Aparece, pues, descompuesta $f(z)$ en dos funciones, de las cuales la una es analítica dentro de K_1 y la otra lo es fuera de K_2 y una y otra analíticas en la corona.

De aquí y de la unicidad del desarrollo, que fácilmente se demuestra, se deduce inmediatamente que el campo de convergencia de la serie de Laurent es la corona de mayor anchura que resulta de la disminución del radio interior y aumento del exterior, sin que dentro de la corona haya punto singular alguno, y, por consiguiente, teniendo por lo menos un punto singular en cada una de las dos circunferencias que limiten la corona. (Si dentro de K_2 no hubiese ningún punto singular, desaparecería el recinto interior y, con él, f_2 y Σ_2.)

La unicidad del desarrollo en serie de Laurent se demuestra del mismo modo que la de la serie de Taylor. Si, *para una misma corona circular*, fuese simultáneamente

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{e} \quad = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

resultaría, sin más que multiplicar los dos desarrollos por $(z - z_0)^{-k-1}$ e integrar a lo largo de una circunferencia de

centro z_0 situada dentro de la corona, sobre cuya línea, por consiguiente, la serie sería uniformemente convergente:

$$2\pi i a_k = 2\pi i c_k, \quad \text{es decir,} \quad a_k = c_k,$$
$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Ejemplos. — Se encuentran sin dificultad los desarrollos:

$$(1) \qquad \frac{1}{(z-1)(z-2)} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}, \quad (1 < |z| < 2)$$

o bien

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n-1} - 1}{2^n}, \quad (2 < |z| < \infty)$$

Hay aquí, pues, dos desarrollos diferentes para la misma función; pero esto no envuelve ninguna contradicción con lo dicho, pues las coronas para las cuales son válidos ambos desarrollos son diferentes.

$$(2) \qquad e^z + e^{\frac{1}{z}} = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} = 1 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{|n|!},$$
$$(0 < |z| < \infty),$$

$$(3) \qquad \operatorname{sen} \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{5}{6} \frac{1}{z^3} + \frac{1}{2} \frac{1}{z^4} + \ldots,$$
$$(1 < |z| < \infty).$$

Problema. — Desarrollar en series de Laurent las funciones:

$$e^{\frac{1}{1-z}} \quad \text{para} \quad |z| > 1;$$

$$\sqrt{(z-1)(z-2)} \quad \text{para} \quad |z| > 2.$$

Manuel Alberto del Castillo

CAPÍTULO XI

CLASIFICACIÓN DE LOS PUNTOS SINGULARES

§ 33. Puntos singulares esenciales y evitables o polos

Ofrece particular interés el caso en que dentro de K_2 no hay otro punto singular de $f(z)$ que el centro z_0. La serie de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

converge, entonces, para todos los valores de z tales que es $0 < |z - z_0| < r_1$, en cuya expresión $r_1 (> 0)$ representa la distancia de z_0 al punto singular más próximo.

En este caso se dice que z_0 es un punto *singular aislado*, y, por consiguiente, siempre es posible un desarrollo de la forma (1) en el entorno de este punto aislado, con tal de que en él sea uniforme $f(z)$. Escribiendo la serie de las potencias decrecientes, como antes, en la forma $\Sigma b_n z'^n$, se ve que ahora representa una función *entera* de z'.

Según que esta función entera sea trascendente o racional y, por consiguiente, que la parte del desarrollo formada con las potencias de exponente negativo tenga infinitos términos o no (pero en este último caso, uno por lo menos), se dice que z_0 es un punto *singular esencial* o *evitable*; en este último caso suele llamársele **polo**: entonces si a_{-m} $(m \geq 1)$

es el último coeficiente diferente de cero, se dice que z_0 es un polo de *orden m*, y la función se transforma sin más que multiplicarla por $(z - z_0)^m$ (pero por ninguna potencia de grado inferior) en una función analítica en z_0 y su entorno y distinta de 0.

De estas definiciones se sigue que las denominaciones de «polo» y «punto singular esencial» se refieren sólo a puntos singulares aislados en cuyos entornos es uniforme la función (véase la pág. 125).

La parte del desarrollo formada por las potencias de exponente positivo se denomina *parte principal* correspondiente a z_0.

Los teoremas que siguen muestran la gran diferencia de carácter de ambas especies de puntos singulares.

Teorema 1.°: Si z_0 es un polo de la función $f(z)$ (por consiguiente, si $\Sigma_2 = \Sigma b_n z'^n$ es una función racional entera de z'), dado arbitrariamente $G > 0$, se puede encontrar $\delta > 0$ tal que, para todos los $|z - z_0| < \delta$, sea:

$$|f(z)| > G,$$

es decir, para todos los puntos z próximos a z_0, el valor absoluto de $f(z)$ es muy grande: o, todavía de otro modo: *al tender z a un polo, la función se hace seguramente infinita* (véase § 30, 2).

Demostración: Sea z_0 un polo de orden α; tendremos, pues:

$$f(z) = \frac{a_{-\alpha}}{(z - z_0)^\alpha} + \ldots + a_0 + a_1 (z - z_0) + \cdots$$

$$= \frac{a_{-\alpha}}{(z - z_0)^\alpha} \{ 1 + b_{-\alpha+1} (z - z_0) + \ldots \},$$

$$\left(a_{-\alpha} \neq 0, \; b_{-\alpha+1} = \frac{a_{-\alpha+1}}{a_{-\alpha}} \right).$$

Tomando ahora δ suficientemente pequeña para que sea $\delta^{\alpha} < |a_{-\alpha}| : 2G$ y que el valor de la expresión entre llaves sea $> \frac{1}{2}$ para todo $|z - z_0| < \delta$, cosa seguramente posible por tratarse de una serie de potencias con el término constante $+ 1$, tendremos que, para todo $|z - z_0| < \delta$, será:

$$|f(z)| \geq \frac{|a_{-\alpha}|}{\delta^{\alpha}} \cdot \frac{1}{2} > G,$$

como queríamos demostrar.

Teorema de Cassorati-Weierstrass: Si z_0 es un punto singular esencial de $f(z)$ (por consiguiente, si $\Sigma_2 = \Sigma b_n z'^n$ es una función trascendente entera de z'), $f(z)$ adquiere en todo entorno de z_0 valores tan pequeños como se quiera (véase § 30, 5). O, en términos más precisos: Si c es un número complejo y δ y ε dos números positivos dados, tan pequeños como se quiera, siempre existen puntos que satisfacen a las dos condiciones:

$$|z - z_0| < \delta \quad \text{y} \quad |f(z) - c| < \varepsilon \quad (^1).$$

Demostración: Incorporando el término constante que aparece en el primer sumando de $f(z)$ al segundo, resulta

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n} = \varphi_1(z) + \varphi_2(z).$$

El primero de los términos que figuran en el segundo miembro, $\varphi_1(z)$, es una función continua en z_0 y que se anula en este punto; por consiguiente, se puede encontrar $\delta_1 \leq \delta$ tal que, para todo $|z - z_0| < \delta_1$, sea siempre $|\varphi_1(z)| < \frac{1}{2}\varepsilon$.

(1) En otros términos: El conjunto de los valores que toma $f(z)$ dentro del círculo $|z - z_0| < \delta$, es denso en todo el plano, por pequeño que haya sido tomado δ.

El segundo término, $\varphi_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z'$, es, por el contrario, una función *trascendente* de z_1, de modo que, según el teorema de Cassorati-Weierstrass, relativo a estas funciones, para ciertos valores muy grandes de z', por ejemplo, para aquellos en que es $|z'| > 1 : \delta_1$, se verifica $|\varphi_2(z) - c| < \frac{1}{2}\varepsilon$, lo cual quiere decir que, para ciertos puntos z tales que es $|z - z_0| < \delta_1$, se cumple la condición $|\varphi_2(z) - c| < \frac{1}{2}\varepsilon$, y, por tanto, para estos z será:

$$|f(z) - c| \leq |\varphi_1(z)| + |\varphi_2(z) - c| < \varepsilon,$$

como queríamos demostrar.

Ejemplos:

1.° La función $e^{\frac{1}{z}}$ tiene un punto singular esencial en $z = 0$ (véase § 32, ejemplo 1.°)

2.° La función racional

$$f(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \ldots + a_m z^m}{b_0 + b_1 z + \ldots + b_k z^k}$$

no tiene otras singularidades que las correspondientes a los puntos que anulan al denominador. Si z_1 es un cero de orden α (véase pág. 110), la función $f(z)$ tiene en z_1 un polo de orden α, como se ve fácilmente. Por consiguiente, una función racional no tiene otras singularidades a distancia finita del origen que polos (véase § 34, ejemplos 2.° y 3.°, y teorema 1.°).

3.° Las funciones tg z y cot z son discontinuas, y, por tanto, singulares, en los ceros de cos z y sen z, respectivamente.

Se reconoce sin dificultad que estos puntos son polos de primer orden de las funciones.

Fijémonos, por ejemplo, en la función cot z en el punto $z = 0$. Desde luego este punto es una singularidad aislada, puesto que los nuevos ceros más próximos de sen z son $z = \pm\pi$; se podrá, pues, aplicar el desarrollo de Laurent, del que desde ahora podemos afirmar que será válido para todos los

$$0 < |z| < \pi$$

y sólo para éstos.

Dividiendo las series potenciales que dan los desarrollos de cos z y sen z, se obtiene como comienzo del desarrollo de cot z:

$$\cot z = \frac{1}{z} - \frac{1}{3}z - \frac{1}{45}z - \dots,$$

el cual, por la unicidad del desarrollo, es el de Laurent para cot z en el entorno del punto $z = 0$. De él se deduce inmediatamente que $z = 0$ es un polo de primer orden.

Nos quedan por considerar los puntos singulares no aislados y aquellos otros en cuyos entornos no es uniforme la función, (por ejemplo, $z = 0$ en $\log z$ y $\sqrt[m]{z}$), en cuyo estudio no entraremos por ahora.

Problema. — Comprobar la exactitud del teorema de Cassorati-Weierstrass en la función $e^{\frac{1}{z}}$, estudiando los valores que toma sobre los radios que parten del origen, en las proximidades de este punto. Determinar los puntos z en los cuales es $e^{\frac{1}{z}} = i$ ¿Qué clase de conjunto forman estos puntos?

§ 34. Comportamiento de las funciones analíticas en el infinito

Como ya dijimos, nuestra definición de función analítica completa (§ 27) tenía el inconveniente de exigir convenios ulteriores para cuanto se refiere al comportamiento de la función en el infinito.

Nos limitaremos, como antes, a considerar el caso en que la función $f(z)$ es uniforme y analítica en el entorno del punto ∞ (véase § 1). Supongamos, pues, que $f(z)$ es uniforme y analítica para $|z| > R$. Poniendo, entonces, como hicimos en el § 1, $z = \frac{1}{z'}$, la función $\varphi(z')$, definida para

$|z'| < \frac{1}{R}$ por $f(z) = f\left(\frac{1}{z'}\right) = \varphi(z')$, es uniforme en aquellos puntos y, con la sola excepción del $z' = 0$, analítica.

El convenio que hacemos se reduce simplemente a *asignar a la función $f(z)$ en el infinito el mismo comportamiento que a la $\varphi(z')$ en $z' = 0$.*

En particular, pues, según las hipótesis admitidas, la función $\varphi(z')$ admite en $0 < |z'| < 1 : R$ un desarrollo en serie de Laurent:

$$\varphi(z') = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n z'^n, \tag{1}$$

del cual puede deducirse, conforme a lo dicho en el artículo anterior, el comportamiento de $\varphi(z')$ en $z' = 0$. Este desarrollo se diferencia sólo en la notación del seguramente posible, también de Laurent, para la función $f(z)$ en los puntos z en que es $|z| > R$:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n; \tag{2}$$

pues es $a_n = b_{-n}$ y $z = \frac{1}{z'}$, y recíprocamente.

Refiriendo, pues, a $f(z)$ el comportamiento de $\varphi(z')$ deducido de (1), resulta que ahora «el punto ∞» es la singularidad aislada considerada, a la que corresponde como parte principal la formada con las potencias de exponente positivo de (2), y que, por consiguiente,

a) $f(z)$ tiene una *singularidad esencial en el ∞*, si en el desarrollo (2) hay *infinitas potencias de exponente positivo;*

b) $f(z)$ tiene *en el infinito un polo de orden β*, si en el desarrollo (2) hay sólo un *número finito de términos con potencias*

de exponente positivo y en ellos el último coeficiente diferente de cero es a_β, $(\beta \geq 1)$;

c) $f(z)$ es analítica en el punto ∞, si en el desarrollo (2) no hay *ningún término con exponente positivo.* — En este caso se considera a_0 como *valor* de la función en el punto ∞. Si es $a_{-1} = \ldots = a_{-(p-1)} = 0$, $a_{-p} \neq 0$, en el ∞ hay un «punto a_0 de orden p».

Ejemplos.

1.° $\frac{1}{1-z}$ es analítica en $z = \infty$, porque es $= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}$ para $|z| > 1$, y tiene en él un cero de primer orden.

2.° Toda función racional en la que el grado, k, del denominador es mayor o igual que el grado, m, del numerador, es analítica en $z = \infty$; y $f(\infty)$ es $= 0$ ó $\neq 0$, según que sea $k > m$ ó $= m$.

3.° Toda función racional en la que es $k < m$ tiene un polo de orden $(m - k)$ en $z = \infty$.

4.° e^z, sen z, cos z y todas las demás funciones trascendentes enteras tienen una singularidad esencial en $z = \infty$.

Como en las nuevas definiciones no ha habido más que un cambio de notación, subsisten los dos teoremas del artículo anterior (con los naturales cambios de palabras).

Teorema 1.°: Si la función $f(z)$ tiene un polo en el punto ∞, dado $G > 0$, siempre se puede determinar un entorno de dicho punto suficientemente pequeño para que todos los puntos del mismo (es decir, para *todos* los $|z| > R$, siendo R suficientemente grande) sea siempre $|f(z)| > G$.

Teorema de Cassorati-Weierstrass: Si $f(z)$ tiene una singularidad esencial en el punto ∞, dados el número complejo c y los números positivos ε y R,s iempre hay puntos, z, para los cuales es

$$|z| > R \quad \text{y} \quad |f(z) - c| < \varepsilon.$$

(Estos dos teoremas contienen evidentemente como casos particulares los teoremas 2.° y 5.° del § 30).

Como aplicación de estas consideraciones, vamos a demostrar el teorema siguiente, de gran aplicación práctica:

Teorema de Riemann: Si $f(z)$ es una función uniforme en el entorno de un punto z_0 — que también puede ser ∞ — y, exceptuando el punto z_0, analítica en todo el entorno, el punto z_0 es

ordinario, si $f(z)$ es acotada en un entorno del punto z_0;

polo, si, dado $G > 0$, existe un entorno de z_0 tal que en todo él es $|f(z)| > G$;

singular esencial, si no se verifica ninguna de las dos condiciones anteriores.

Demostración: Por hipótesis, $f(z)$ puede ser desarrollada, para el entorno de z_0, en una serie de Laurent, que tiene la forma

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{o} \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n \left(\frac{1}{z}\right)^n,$$

según que z_0 sea finito o infinito.

Los dos teoremas de este artículo y del anterior, juntos con el hecho de que una función en el entorno de un punto ordinario también es acotada, demuestran que desde luego las condiciones enunciadas son necesarias; y que son suficientes se deduce inmediatamente observando que las tres posibilidades de comportamiento de $f(z)$ se excluyen mutuamente y son las únicas que pueden imaginarse.

Problema. — ¿De qué naturaleza son las singularidades de las funciones

$$\frac{z^2 + 4}{e^z}, \quad \cos z - \operatorname{sen} z, \quad \cot z$$

en el punto $z = \infty$?

§ 35. Teorema de los residuos

Si $f(z)$ es una función analítica en el entorno de z_0, según el teorema de Cauchy, es

$$\int f(z)\,dz = 0,$$

tomando como trayectoria de integración una curva cerrada pequeña que contenga al punto z_0, recorrida en sentido positivo. Si, por el contrario, z_0 es un punto singular aislado, en cuyo entorno es $f(z)$ uniforme y regular, la misma integral no es nula, en general. Su valor puede encontrarse en seguida del siguiente modo: Como $f(z)$ puede ser desarrollada en serie de Laurent para un entorno de z_0, $(0<|z-z_0|<r)$, según el § 31 será:

$$\frac{1}{2\pi i}\int^{(C)} f(z)\,dz = a_{-1}.$$

El valor de esta integral o, según este resultado, el coeficiente de la primera potencia de exponente negativo en el desarrollo de Laurent, se llama **residuo** de $f(z)$ en z_0 (1), y la fórmula anterior puede considerarse, en cierto modo, como una generalización del teorema de Cauchy.

Más general aún, puede demostrarse el teorema siguiente:

Teorema de los residuos: Sea C una línea cerrada contenida en el campo de regularidad de la función $f(z)$, uniforme y analítica salvo en un número finito de puntos singulares (por consiguiente, aislados) $z_1, z_2, \ldots, z_k$. Entonces es

(1) Para esto hay que suponer finito z_0.

$$\frac{1}{2\pi i}\int^{(C)} f(z)\,dz$$

la suma de los residuos de $f(z)$ en los puntos $z_1, z_2, \ldots, z_k$.

Demostración: Según el § 17, 3, es

$$\frac{1}{2\pi i}\int^{(C)} f(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int^{(C_1)} f(z)\,dz$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int^{(C_2)} f(z)\,dz + \ldots + \frac{1}{2\pi i}\int^{(C_k)} f(z)\,dz,$$

si cada C_λ, $(\lambda = 1, 2, \ldots, k)$, es un pequeño contorno que sólo envuelve al punto z_λ, lo que demuestra el teorema, puesto que los sumandos que figuran en el segundo miembro son, precisamente, los expresados residuos.

En las aplicaciones se conoce generalmente el residuo de la serie de Laurent, con lo cual se conoce el valor de la integral.

1.° Si, por ejemplo, el contorno cerrado C está, como antes, en el campo de regularidad de la función, pero ésta es uniforme y analítica en el interior de C y, además, es diferente de 0 a lo largo de C (véase § 24, teorema 1.°), este contorno sólo puede encerrar un número finito de ceros. Designemos éstos por $z_1, z_2, \ldots, z_k$, y sus órdenes por $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$. Se acostumbra considerar un cero de orden α (y lo mismo un polo) como una raíz α-ple (polo α-ple) y, en consecuencia, contarlo como α ceros (α polos).; y así, se dice que el número de ceros de $f(z)$ dentro de C es:

$$N = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k.$$

Para éstos se verifica el

Teorema 1.°:

$$N = \frac{1}{2\pi i}\int^{(C)} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz.$$

Demostración: El integrando es una función analítica en el contorno C, dentro del cual son singulares los puntos $z_1, z_2, \ldots, z_k$. Se reconoce fácilmente que z_λ es un polo de primer orden con el residuo α_λ; pues si $f(z)$ tiene un cero de orden α en ζ, será:

$$f(z) = a_\alpha(z-\zeta)^\alpha + a_{\alpha+1}(z-\zeta)^{\alpha+1} + \ldots,$$
$$f'(z) = \alpha\, a_\alpha(z-\zeta)^{\alpha-1} + (\alpha+1)a_{\alpha+1}(z-\zeta)^\alpha + \ldots;$$

y, por tanto, como $a_\alpha \neq 0$,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\alpha}{z-\zeta} + c_0 + c_1(z-\zeta) + \ldots$$

que es el desarrollo en serie de Laurent de $\frac{f'(z)}{f(z)}$ para un cierto entorno de ζ (los coeficientes, c, se calculan con facilidad por medio de los a); por consiguiente, ζ es, en efecto, un polo de primer orden con el residuo α. Aplicando, ahora, el teorema de los residuos, resulta:

$$\frac{1}{2\pi i}\int^{(C)} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k = N,$$

como queríamos demostrar.

2.° Si $f(z)$ tiene un polo de orden β en ζ, procediendo de la misma manera que acabamos de hacer se ve que $\frac{f'(z)}{f(z)}$ tiene en ζ un polo de primer orden con el residuo $-\beta$. Por

tanto, si en el interior de C hay un número finito de polos, $z'_1, z'_2, \ldots, z'_m$, de órdenes $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$, será:

$$\frac{1}{2\pi i}\int^{(C)} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$$
$$= \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha - (\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_m),$$

en cuya expresión se cuenta $\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_m = P$, de manera análoga a como se ha contado N como número de los ceros contenidos en C. Resulta, pues:

Teorema 2.°: Si el contorno cerrado C está en el campo de regularidad de $f(z)$ y esta función es diferente de 0 a lo largo de C, uniforme en el interior de C, y, salvo en un número finito de polos, analítica, es

$$\frac{1}{2\pi i}\int^{(C)} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = N - P,$$

es decir, igual al número de ceros disminuído en el de polos de $f(z)$ en el interior de C, contando cada punto tantas veces como indica su orden.

Problema 1.° — La función $f(z)$ tiene en z_1 un cero de orden α. ¿Cuáles son los residuos de

$$z\frac{f'(z)}{f(z)} \quad \text{y} \quad \psi(z)\frac{f'(z)}{f(z)},$$

si $\psi(z)$ es una función cualquiera analítica en z_1? ¿Cuáles son los residuos si $f(z)$ tiene un polo de orden β en z_1?

Problema 2.° — Como adición al problema 1.°, determinar el valor y la significación de las integrales

$$\frac{1}{2\pi i}\int^{(C)} z\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz \quad \text{y} \quad \frac{1}{2\pi i}\int^{(C)} \psi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz,$$

cuando $f(z)$ y C satisfacen a las condiciones del teorema 1.° o a las del 2.° de este artículo.

§ 36. Las funciones racionales

Como ya dijimos en la página 115, raras veces es calculable una función analítica por medio de una *expresión explícita*. Hasta ahora sólo se nos ha presentado este caso tan favorable en las funciones *enteras* y en las *racionales*. Si se quiere, pues, proceder por consideraciones «teórico-funcionales puras» a la clasificación de las funciones, es preciso prescindir por completo de sus *representaciones* y caracterizarlas exclusivamente por sí mismas (por el conjunto de sus valores, la naturaleza de sus singularidades, etc.). Así, las funciones enteras, haciendo caso omiso de todas las representaciones que puedan tener, están caracterizadas únicamente por la propiedad de ser analíticas en todo el plano; y los teoremas 2.° y 5.° del § 30 muestran cómo se dividen estas funciones en enteras racionales y enteras trascendentes, por consideraciones «teórico-funcionales puras».

Los dos teoremas que siguen caracterizan igualmente la *clase de las funciones racionales*:

Teorema 1.°: Una función racional no puede tener otras singularidades que polos.

La demostración está contenida en el § 33, ejemplo 2.°, y § 34, ejemplos 2.° y 3.° Para probar que esta propiedad es característica de las funciones, falta demostrar la propiedad recíproca.

Teorema 2.°: Si una función uniforme no tiene para valores finitos ni para el valor ∞ de z otras singularidades que polos, es función *racional*.

Demostración: Como $f(z)$, a lo más, tiene un polo en $z = \infty$, tiene que ser analítica en toda la región exterior a un círculo suficientemente grande (es decir, en un determinado «entorno del punto ∞»), aparte $z = \infty$. Todos los

puntos singulares a distancia finita están, pues, dentro de un cierto círculo que se puede determinar, y dentro del cual sólo puede haber un número finito de puntos singulares, porque, en caso contrario, según el teorema 6.° del § 1, dentro del mismo círculo debería haber un punto de acumulación de estos singulares, el cual ya no sería polo, porque, por definición, todo polo es necesariamente aislado.

Si no hubiera a distancia finita ningún punto singular, $f(z)$ sería función *entera* y, según el § 34, ejemplo 4.°, necesariamente *racional*.

Si a distancia finita hay los puntos singulares $z_1, z_2, \ldots, z_k$, en el entorno de cada uno de ellos podrá ser desarrollada $f(z)$ en una serie de Laurent que sólo podrá tener un número finito de términos con exponentes negativos:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(\lambda)}(z - z_\lambda)^n + \frac{a_{-1}^{(\lambda)}}{z - z_\lambda} + \ldots + \frac{a_{-\alpha_\lambda}^{(\lambda)}}{(z - z_\lambda)^{\alpha_\lambda}}.$$

siendo α_λ, $(\lambda = 1, 2, \ldots, k)$, el orden del polo. Designando por $h_\lambda(z)$ la parte principal que sigue a la serie de potencias, $h_\lambda(z)$ es una función racional que sólo tiene un punto singular z_λ (polo de orden α_λ) y que es analítica y de valor nulo en $z = \infty$.

Ahora bien, la función

$$f(z) - h_1(z) - h_2(z) - \ldots - h_k(z)$$

es, evidentemente, una función entera; luego, como en el ∞ sólo puede tener un polo, a lo más, tiene que ser una función racional $g(z)$, que puede reducirse a una constante (función racional entera de grado 0), caso de ser ordinario el punto ∞. Por consiguiente, es

$$f(z) = g(z) + h_1(z) + h_2(z) + \ldots + h_k(z) \quad (^1),$$

cuya expresión evidencia el carácter racional de $f(z)$. Teniendo en cuenta la forma especial de la parte principal $h_\lambda(z)$, podemos enunciar el

Teorema 3.°: Toda función racional puede ser descompuesta en fracciones simples.

Terminaremos con una segunda demostración del *teorema fundamental del Algebra*, basada en el teorema de los residuos (véase § 30, 2).

Si $f(z)$ es una función racional entera

$$a_0 + a_1 z + \ldots + a_m z^m, \quad (m \geq 1,\ a_m \neq 0),$$

según lo dicho en el § 30, teorema 2.°, se podrá determinar un círculo K de centro 0 y radio R, fuera del cual sea siempre $|f(z)| > 1$ y, por consiguiente, no haya ningún cero de la función. Todos los que pueda tener $f(z)$ estarán, pues, dentro de K. Su número, N, según el teorema 1.° del § 35, es

$$N = \frac{1}{2\pi i} \int^{(K)} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz.$$

Pero el desarrollo de Laurent del integrando, para $|z| > R$, comienza con

$$\frac{m}{z} + \frac{c_2}{z_2} + \frac{c_3}{z_3} + \ldots,$$

(1) El caso antes mencionado de ser $f(z)$ analítica para todo valor finito de z, corresponde al de faltar en este desarrollo los sumandos $h_\lambda(z)$.

donde no es preciso conocer los coeficientes c_i; de aquí se deduce en seguida que el valor de la integral es m; luego

$$N = m,$$

es decir, una función racional entera de grado m tiene m ceros (raíces), si cada uno se cuenta tantas veces cuantas indica su orden.

LIBRO II

Aplicaciones y complementos de la teoría general

Manuel Alberto del Castillo

INTRODUCCIÓN

En el libro I de esta Teoría de funciones [1] se han estudiado los fundamentos de la teoría general de las funciones analíticas y sólo incidentalmente se ha tratado de algunas funciones especiales (como e^z, sen z, log z, $\sqrt[m]{z}$, entre otras) o de ciertas clases de funciones (como las funciones enteras o las racionales). Ahora nos vamos a ocupar más circunstanciadamente en el estudio de cada una de ellas; y únicamente para aclarar algunos puntos que no quedaron bien explicados en el **libro I**, §, 27, pág. 124, haremos algunas consideraciones generales, mostrando que la distinción allí establecida entre funciones uniformes y multiformes es fundamental. Tal distinción será, por consiguiente, la que presida toda la exposición que sigue.

De ambas clases de funciones, uniformes y multiformes, vamos a escoger algunos tipos especialmente característicos e importantes. Como, naturalmente, dentro de los estrechos límites de esta obrita no se puede pretender que el estudio que se haga sea completo, es inevitable una cierta arbitrariedad en la elección: sin embargo, para reducirla lo más posible, partiremos como de funciones las más importantes, de las elementales (funciones racionales, enteras y fraccionarias, e^z, sen z, log z, $\sqrt[p]{z}$,...), y del conocimiento de sus

[1] Teoría de funciones, libro I: Fundamentos de la teoría general de las funciones analíticas. En lo que sigue nos referiremos a ella con la indicación I antepuesta al número del artículo o de la página.

propiedades fundamentales trataremos de inferir lo esencial y más general de las propiedades de todas [1].

Las *funciones racionales enteras* — evidentemente las más sencillas y comprensibles — están caracterizadas de un modo «teórico-funcional puro» por ser analíticas en todo el plano y tener un polo en el punto ∞ (I, pág. 154). Si se prescinde de esta última propiedad, se llega a la clase más general, de las *funciones enteras*, a la cual pertenecen, como casos particulares, las racionales y las trascendentes, y que, por tanto, están caracterizadas simplemente por ser analíticas en todo el plano (excluyendo el ∞). Estas funciones fueron así consideradas en I, § 29, como las más sencillas, por admitir para cualquier punto como centro un desarrollo en serie convergente en todo el plano que, en consecuencia, representa la función. De aquí se sigue que respecto de tales funciones no hay para qué hablar de prolongación analítica; todas ellas son, naturalmente, uniformes y en su conjunto son idénticas con el de todas las series convergentes de potencias de la forma

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n ,$$

y aparecen como una generalización inmediata de las funciones racionales enteras.

El primer capítulo lo dedicaremos a examinar qué propiedades fundamentales de las funciones racionales enteras subsisten para la clase más general de las funciones enteras y cuáles no.

Las *funciones racionales fraccionarias* están caracterizadas de un modo teórico-funcional puro por la circunstancia

[1] Sólo se puede tratar, pues, aquí de una selección. La teoría de funciones abarca un campo tan vasto que no puede ser recorrida no ya en una, mas tampoco en varias jornadas; por consiguiente, aunque nos propongamos ofrecer en las pocas páginas que siguen una rápida visión de algunos de los puntos principales de ese campo, debe el lector prevenirse contra la falsa idea de que el contenido de este libro II equivalga al de la Teoría de funciones.

(I, § 36, teoremas 1.° y 2.°) de que en todo el plano y en el punto ∞ no pueden tener otras singularidades que polos. Si se prescinde de esta propiedad respecto al punto ∞, se llega nuevamente a una clase más general de funciones, las llamadas *funciones meromorfas*, caracterizadas, por consiguiente, por la sola propiedad de no tener en todo el plano (prescindiendo del ∞) otras singularidades que polos.

El segundo capítulo estará dedicado a estas funciones, también necesariamente uniformes.

La propiedad más interesante, desde el punto de vista teórico-funcional, de las funciones e^z, sen z, . . . es su periodicidad. Esta propiedad, prescindiendo de la particular naturaleza de tales funciones, será estudiada circunstanciadamente, siempre de un modo teórico-funcional puro, en el capítulo tercero. Así se llega a las clases de *funciones simple* y *doblemente periódicas*. Dentro de estas últimas figuran, en particular, las *funciones elípticas*. A estos tipos de funciones uniformes habremos de limitarnos en nuestro estudio.

Para las *funciones multiformes*, comenzaremos por establecer su concepto de manera más clara que la única que era posible en I, § 27, y dar una idea precisa de en qué estriba la multiformidad. A ello se llega en el capítulo cuarto, por una representación auxiliar muy simple, verdaderamente genial, la de las llamadas *superficies de Riemann*, cuya exposición haremos comenzando por las funciones multiformes más simples, como las

$$\sqrt[p]{z}, \ \log z, \ \sqrt{(z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_k)};$$

y en el capítulo quinto trataremos de una clase de funciones particularmente interesantes y, por esto, muy bien estudiadas: las *funciones algebraicas*.

Utilizando los conceptos de *singularidades algebraicas* a que así se llega, dedicaremos el sexto capítulo a llenar todas

las lagunas de que aun adolecía nuestra definición de función analítica completa y figura analítica, dada en I, página 123, y establecer con toda generalidad el concepto de *figura analítica*, concepto admirable que desde el comienzo ha sido el centro de todas nuestras consideraciones, pero imposible de establecer de primera intención, y, sin duda alguna, de los más hermosos y profundos que hay en toda la Matemática.

PRIMERA PARTE

FUNCIONES UNIFORMES

CAPÍTULO PRIMERO

FUNCIONES ENTERAS

§ 1. Teorema del producto de Weierstrass

La propiedad más importante de las funciones racionales enteras es la que constituye el teorema fundamental del Algebra (I, págs. 132 y 156): *Toda función racional entera* (no constante) *tiene ceros*. Como, por ejemplo, e^z — por ser $e^z \cdot e^{-z} = 1$ — no tiene ningún cero, parece que el estudio al cual está dedicado este capítulo, según lo dicho en la Introducción, no va a conducir a resultado alguno apreciable; sin embargo, veremos con un examen más detenido de la cuestión que no es así. Sea

$$g_0(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_m z^m, \quad (m \geq 1, \quad a_m \neq 0)$$

una función racional entera, no constante, cualquiera; del teorema fundamental del Algebra se deduce que $g_0(z)$ puede ponerse bajo la forma

$$(1) \qquad g_0(z) = a_m (z - z_1)^{\alpha_1} (z - z_2)^{\alpha_2} \ldots (z - z_k)^{\alpha_k}$$

cuando se representa por $z_1, z_2, \ldots, z_k$ todos los ceros de la función $g_0(z)$ y por $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ sus órdenes respectivos. Esto se puede expresar del siguiente modo:

(A) Toda función racional entera admite una *representación factorial*, que pone de manifiesto la posición y el orden de sus ceros [1].

De aquí se sigue inmediatamente que toda otra función racional entera, $g(z)$, que tenga los mismos ceros con los mismos órdenes respectivos, sólo difiere de $g_0(z)$ en el factor a_m, y, además, que puede darse la posición y el orden de cada cero; en otros términos:

(B) Siempre se pueden formar funciones racionales enteras que tengan ceros de posición y orden dados (en número finito, naturalmente) — y esto en forma de un *producto* que ponga de manifiesto tales ceros; y de una función particular de estas condiciones se deduce la más general por multiplicación por un factor arbitrario diferente de cero («por multiplicación por una función racional entera sin ceros»).

De esta manera fijado el contenido del teorema fundamental del Algebra, por las dos afirmaciones (A) y (B), veremos que, sin variar palabra, es aplicable a cualquier función entera.

Para ello, comencemos por estudiar el **problema,** fundamental para cuanto sigue, que corresponde a la afirmación (B), de formar todas las funciones enteras que tengan ceros prefijados [2] y ver hasta qué punto está determinada de este modo una función entera.

Funciones enteras sin ceros. Si se quiere formar una función entera que no tenga ningún cero, tendremos desde luego una solución en la constante 1, ó en la función e^z, o la e^{z^2} o, más general, en la $e^{h(z)}$, representando por $h(z)$ una función entera completamente arbitraria. Esta última solución del problema es, precisamente, la *más general*, es

[1] Esto se verifica también en las funciones racionales enteras «sin ceros», es decir, las de grado 0 (por consiguiente, constantes diferentes de 0), para las cuales la representación factorial constaría del factor a_m ($= a_0 \neq 0$). Por el contrario, a la constante 0 no le son aplicables ninguna de estas consideraciones.

[2] Es decir, la función debe tener ceros de orden dado en puntos también dados — *y en todos los demás puntos debe ser* $\neq 0$.

decir, $e^{h(z)}$ (siendo $h(z)$ entera arbitraria) no sólo es una función entera sin ceros, sino que, recíprocamente, toda función de estas condiciones puede ponerse bajo la forma $e^{h(z)}$. Tenemos así el

Teorema 1.°: Si $h(z)$ es una función entera arbitraria, *$e^{h(z)}$ es la función entera más general, que no tiene ningún cero* [1].

Demostración: Bastará probar que si

$$H(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$$

es una función entera dada, sin ceros, se puede encontrar otra función entera $h(z) = b_0 + b_1 z + \dots$ tal que sea $e^{h(z)} = H(z)$. Ahora bien, por ser $H(z) \neq 0$ y, en particular, $a_0 = H(0) = 0$ se puede escoger b_0 con la condición de ser $e^{b_0} = a_0$, puesto que e^z toma todos los valores diferentes de 0; además, por la misma razón, se ve que la función $\frac{1}{H(z)}$ es uniforme y analítica en todo el plano, luego es función entera, y como lo mismo sucede a $H'(z)$, también

$$\frac{H'(z)}{H(z)} = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$$

es función entera, y, por tanto, la nueva serie es constantemente convergente, y esto mismo ocurre, entonces, a la serie

$$b_0 + c_0 z + \frac{c_1}{2} z^2 + \dots + \frac{c_{n-1}}{n} z^n + \dots$$
$$= b_0 + b_1 z + \dots + b_n z_n + \dots,$$

que, por consiguiente, representa una función entera. Poniendo ahora $e^{h(z)} = H_1(z)$, resulta:

[1] Haciendo uso de la función multiforme log, aparece este teorema como cosa casi trivial. Pues si $H(z)$ es una función entera que siempre es $\neq 0$, y se designa por $h(0)$ el valor principal de $\log H(z)$, la función $h(z) = \log H(z)$ es una función analítica de z en un cierto entorno del origen. Su desarrollo $h(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots$ tiene, pues, un radio de convergencia positivo, el cual debe ser $+\infty$ (I, § 23, teor. 2.°), puesto que $\log H(z)$ sólo puede ser singular donde $H(z)$ lo sea o se anule; por consiguiente, en ningún punto propio.

$$\frac{H_1'(z)}{H_1(z)} = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots = \frac{H'(z)}{H(z)};$$

luego, $H_1 \cdot H' - H \cdot H_1' = 0$, y también

$$\frac{H_1 \cdot H' - H \cdot H_1'}{H^2} = \frac{d}{dz}\left(\frac{H_1(z)}{H(z)}\right) = 0,$$

lo cual demuestra que el cociente de las dos funciones $H_1(z)$ y $H(z)$ es constante. Para $z = 0$ se encuentra que esta constante tiene el valor 1; luego

$$H(z) = H_1(z) = e^{h(z)},$$

como queríamos demostrar (1).

Una vez resuelto así el problema para el caso de no haber *ningún* cero, se ve en seguida cómo queda determinada una función entera por el conocimiento de sus ceros. Sean, en efecto, $G_0(z)$ y $G(z)$ dos funciones enteras que tienen los mismos ceros y del mismo orden: su cociente (I, § 24, teorema 4.°) será una función también entera, pero *sin* ceros. Las dos funciones $G(z)$ y $G_0(z)$ se diferencian, pues [véase (B)], a lo más, en un factor, función entera sin ceros; y recíprocamente, las funciones que se deducen de la $G_0(z)$ por este medio no se diferencian de ésta en nada que a los ceros y su orden se refiera. Teniendo en cuenta el teorema 1.°, esto se expresa así:

Teorema 2.°: Si $G_0(z)$ es una función entera dada, y $h(z)$ es una función entera *arbitraria*,

$$G(z) = e^{h(z)} \cdot G_0(z)$$

es la función entera *más general*, cuyos ceros son los mismos, en posición y orden, que los de $G_0(z)$.

(1) Esta demostración prueba de un modo general que si $f_1(z)$ y $f_1(z)$ son funciones *uniformes, analíticas y diferentes de 0* en un recinto, G, y en él tienen iguales sus derivadas logarítmicas $f':f$ y $f'_1:f_1$ sólo difieren en un factor constante, que naturalmente será $= 1$ si f y f_1 tienen el mismo valor en un punto de G.

Queda, según esto, por resolver el problema de la formación de una función entera con ceros cualesquiera dados.

En este punto hemos de imponer una restricción: Puesto que una función entera nunca puede tener un punto singular a distancia finita, en todo recinto finito sólo puede tener un número finito de ceros (I, § 24, teorema 1.°); luego los ceros dados no pueden tener ningún punto de acumulación propio. Establecida así esta limitación, impuesta por la índole del problema, veremos que siempre puede formarse una función de las condiciones pedidas. Esta función vendrá representada [análogamente a lo que ocurre en las funciones racionales enteras (1)] en forma de un producto que pone de manifiesto la posición y el orden de sus ceros. Se verifica, pues, el siguiente teorema, que lleva el nombre de su descubridor:

Teorema del producto de Weierstrass: Dado un conjunto de puntos cualquiera (finito o infinito), que no tiene ningún punto de acumulación a distancia finita, y asignado a cada uno de sus puntos un número entero positivo determinado, *existe siempre una función entera que tiene en los puntos dados ceros con los órdenes indicados por aquellos números, y que fuera de tales puntos es diferente de cero.* Esta función puede ponerse bajo la forma de un producto (véase la fórmula que la expresa en la página 180) que permite reconocer la posición y el orden de los ceros. Y entonces, según lo dicho en el teorema 2.°, si $G_0(z)$ es una función de estas condiciones,

$$G(z) = e^{h(z)} \cdot G_0(z)$$

es la función *más general* que satisface a las condiciones del problema, si por $h(z)$ se denota una función entera arbitraria (1).

(1) Si la función entera que ha de formarse no ha de tener *ningún* cero, hay que prescindir del factor $G_0(z)$, es decir, sustituirlo por 1 — por consiguiente, también por una función entera con los ceros dados.

Suponiendo, por el momento, demostrado este teorema fundamental, de él se deduce inmediatamente que también la primera de las propiedades sentadas para las funciones racionales enteras, la (A), se puede extender a todas las funciones enteras.

En efecto, si $G(z)$ es una función entera cualquiera dada, el conjunto de sus ceros no puede tener ningún punto de acumulación a distancia finita. Según el teorema de Weierstrass, se puede, por consiguiente, formar otra función $G_0(z)$ cuyos ceros tengan las mismas posiciones y los mismos órdenes que los de aquélla, y esta función se obtiene en forma de producto que pone de manifiesto sus ceros. Pero entonces, según el teorema 2.°, si $h_0(z)$ es una función convenientemente escogida, necesariamente será

$$G(z) = e^{h_0(z)} G_0(z),$$

con lo cual se habrá obtenido una *representación factorial* de la función entera dada $G(z)$, que permite reconocer la posición y el orden de sus ceros.

Resulta, pues, que, como habíamos dicho, las dos propiedades (A) y (B) de las funciones racionales enteras, se extienden, sin variar palabra, a las funciones enteras cualesquiera.

Nos queda ahora por demostrar el teorema de Weierstrass, a lo cual dedicaremos el artículo próximo.

Problemas: 1.° Demostrar que $\dfrac{\operatorname{sen} iz}{e^{iz} - 1}$ es una función entera sin ceros. Según el teorema 1.°, se podrá poner bajo la forma $e^{h(z)}$. ¿Cómo hay que escoger, para ello, la función $h(z)$?

2.° Demostrar que las funciones $\cos iz$ y $e^{2z} + 1$ tienen comunes los ceros en posición y orden. Según el teorema 2.°, se podrá pasar de la primera a la segunda multiplicándola por un factor de la forma $e^{h(z)}$. ¿Cómo hay que elegir, para ello, la función $h(z)$?

§ 2. Demostración del teorema del producto de Weierstrass

Nos proponemos encontrar en forma de producto (que, en general, será infinito) la función entera que satisfaga a las condiciones del teorema de Weierstrass. Lo mismo que hicimos en el caso de las series, supondremos ahora conocidas las propiedades más sencillas de los productos infinitos con factores constantes.

Sin embargo, como de ordinario no suelen conocerse estas propiedades del modo tan general que conviene para que sirvan de sólido fundamento a cuanto sigue, enunciaremos sin demostración los teoremas y las definiciones más importantes que hemos de utilizar más tarde [1].

Definición: Se dice que el producto infinito

$$u_1 \cdot u_2 \ldots u_\lambda \ldots = \prod_{\lambda=1}^{\infty} u_\lambda, \tag{1}$$

cuyos factores son números complejos cualesquiera, es **convergente** (propiamente) cuando a partir de un cierto índice — por ejemplo, para todo $\lambda > m$ — ningún factor se anula, y existe, y es diferente de cero, el

$$\lim_{n \to \infty} (u_{m+1} \cdot u_{m+2} \ldots u_n).$$

Designando por U_m el valor de este límite, el número

$$U = u_1 \cdot u_2 \ldots u_m \cdot U_m$$

se llama *valor* del producto infinito [2].

[1] Las demostraciones pueden verse en muchos tratados de la teoría de series infinitas y de Teoría de funciones, en particular en las obras de Stolz-Gmeiner y Nielsen, citadas en la página 7 [2].

[2] La gran carestía de la postguerra en Alemania obligó a los editores a reducir lo posible el tamaño de los Manuales e hizo que en la segunda edición del presente suprimiera el autor todas estas demostraciones. A fin de no privar al lector de ellas, daremos en notas las demostraciones cuando no se trate de cosas de inmediata evidencia. El lector que quiera completar sus conocimientos acerca de esta teoría, puede acudir a las obras: Pringsheim, *Vorlesungen über Zahlen und Funktionenlehre*, 13 Leipzig, 1921; Knopp, *Theorie und Anwendungen der unendlichen Reihen*, Berlín, 1922. (*N. del T.*)

[3] Análogamente a lo dicho para las series infinitas, perecería natural considerar convergente el producto (1) y atribuirle el valor U, siempre que fuese

$$\lim_{n \to \infty} (u_1 \cdot u_2 \ldots u_n) = U.$$

Los teoremas siguientes, que se demuestran con gran facilidad, son aplicables a estos productos infinitos convergentes.

Teorema 1.º: La condición necesaria y suficiente para que un producto convergente sea nulo es que uno de sus factores lo sea (1).

Teorema 2.º: La condición necesaria y suficiente para que el producto (1) sea convergente es que dado un número $\varepsilon > 0$ se pueda determinar un índice n_0 tal que para todo $n > n_0$ y todo $r \geqq 1$ se verifique constantemente

$$|u_{n+1} \cdot u_{n+2} \cdots u_{n+r} - 1| < \varepsilon \text{ (2)}.$$

(Véase I, § 5, teorema 2.º, y § 6, teorema 2.º).

Pero, evidentemente, entonces sería convergente y *siempre* tendría el valor cero *todo* producto en el que hubiera *un* factor nulo; del mismo modo, sería convergente y *siempre* de valor nulo, p. ej., *todo* producto en el que para todo $\lambda > m$ se conservase constantemente $|u_\lambda| \leqq \vartheta < 1$. Para excluir estos casos, es conveniente hacer uso de la definición arriba dada y —caso necesario— se agrega «propiamente» para indicar la restricción impuesta.

(1) Pues designando por $V_i = u_1 \cdot u_2 \ldots u_i$, $(i = 1, 2, 3 \ldots)$, por ser convergente el producto habrá un número m tal que para todo $i > m$ sea $u_i \neq 0$, y existirá $U_m = \lim_{p \to \infty} (u_{m+1} \cdot u_{m+2} \ldots u_{m+p}) \neq 0$; por consiguiente, el valor del producto $U = V_m U_m = u_1 \cdot u_2 \ldots u_m \cdot U_m$ será nulo siempre que lo sea uno de los factores $u_1, u_2, \ldots, u_m$, y sólo entonces. (*N. del T.*)

(2) En efecto, de la condición de convergencia se deduce que hay un número n_0 tal que para todo $n > n_0$ existen $U_n = \lim_{p \to \infty} (u_{n+1} \cdot u_{n+2} \ldots u_{n+p}) \neq 0$ y, por consiguiente, que hay un número $\alpha > 0$, tal que para $n > n_0$ siempre es

$$|u_{n+1} \cdot u_{n+2} \ldots u_{n+p}| \geqq \alpha > 0,$$

y también que a partir de un cierto valor de p es

$$|u_{n+1} \cdot u_{n+2} \ldots u_{n+p+k} - u_{n+1} \cdot u_{n+2} \ldots u_{n+p}| < \varepsilon \alpha,$$

siendo $\varepsilon > 0$ tan pequeño como se quiera; y de aquí resulta, dividiendo esta desigualdad por la anterior:

$$|u_{n+1} \cdot u_{n+2} \ldots u_{n+p+k} - 1| < \varepsilon.$$

Recíprocamente, esta condición es suficiente, porque si se toma para valor de ε una fracción θ propia, $0 < \theta < 1$, se puede determinar n de modo que para todo $r \geqq 1$ sea

$$|u_{n+1} \cdot u_{n+2} \ldots u_{n+r} - 1| < \theta$$

y, por consiguiente,

$$1 - \theta < |u_{n+1} \cdot u_{n+2} \ldots u_{n+r}| < 1 + \theta,$$

lo cual demuestra que, cualquiera que sea $i > n$ es $u_i \neq 0$, y que si el producto de que se trata tiene límite, éste no es nulo.

Si ahora tomamos ε tan pequeño como se quiera, se puede encontrar n tal que para todo $h \geqq 1$ sea

$$\left| \frac{u_{n+1} \cdot u_{n+2} \ldots u_{n+r+h}}{u_{n+1} \cdot u_{n+2} \ldots u_{n+r}} - 1 \right| < \frac{\varepsilon}{1 + \theta}$$

y, por tanto,

$$\left| u_{n+1} \cdot u_{n+2} \ldots u_{n+r+h} - u_{n+1} \cdot u_{n+2} \ldots u_{n+r} \right| < \frac{\varepsilon}{1+\theta} \left| u_{n+1} \cdot u_{n+2} \ldots u_{n+r} \right| < \varepsilon,$$

lo cual prueba la existencia de aquel límite. (*N. del T.*)

Como, aplicando este teorema al caso de ser $r = 1$, $n + 1 = \lambda$, resulta que necesariamente es $\lim_{\lambda \to \infty} u_\lambda = 1$, se acostumbra poner los factores del producto en la forma $1 + c_\lambda$, con lo cual el producto (1) toma la forma

$$\prod_{\lambda=1}^{\infty} (1 + c_\lambda). \tag{2}$$

En ella aparece, pues, como condición necesaria (pero no suficiente) para la convergencia del producto, la de ser $c_\lambda \to 0$.

Definición: Se dice que el producto (2) es *absolutamente convergente* si es convergente el producto (1)

$$\prod_{\lambda=1}^{\infty} (1 + |c_\lambda|).$$

Teorema 3.º: La convergencia absoluta es suficiente para la convergencia ordinaria; o: de la convergencia de $\Pi(1 + |c_\lambda|)$ se sigue la de $\Pi(1 + c_\lambda)$ (2).

Este teorema demuestra que, para nuestro objeto, es suficiente tener criterios de convergencia para productos absolutamente convergentes. La convergencia de éstos queda fijada por los dos siguientes teoremas:

Teorema 4.º: Es condición necesaria y suficiente para que el producto $\Pi(1 + \gamma_\lambda)$ sea convergente que lo sea la serie $\Sigma \gamma_\lambda$ (3).

---

(1) La definición que parece natural, «Πu_λ es absolutamente convergente si lo es $\Pi |u_\lambda|$», sería trivial, puesto que entonces *todo* producto convergente sería absolutamente convergente.

(2) Pues

$$|(1 + c_{n+1})(1 + c_{n+2}) \ldots (1 + c_{n+r}) - 1| \leqq |1 + c_{n+1}| \cdot |1 + c_{n+2}| \ldots |1 + c_{n+r}| - 1$$
$$\leqq (1 + |c_{n+1}|)(1 + |a_{n+2}|) \ldots (1 + |a_{n+r}|) - 1,$$

que, teniendo en cuenta el teorema 2.º, demuestra el enunciado. (*N. del T.*)

(3) Poniendo para abreviar, $\prod_{i=1}^{k} (1 + \gamma_i) = V_k$, $\sum_{i=1}^{r} \gamma_{n+i} = S_r$, y teniendo en cuenta que son todos los $\gamma_\lambda > 0$, será:

$$\left| \frac{V_{n+r}}{V_n} - 1 \right| = (1 + \gamma_{n+1})(1 + \gamma_{n+2}) \ldots (1 + \gamma_{n+r}) - 1$$
$$= \gamma_{n+1} + \gamma_{n2} + \ldots + \gamma_{n+r}$$
$$+ \gamma_{n+1} \gamma_{n+2} + \gamma_{n+1} \gamma_{n+2} + \ldots + \gamma_{n+r-1} \gamma_{n+r}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \gamma_{n+1} \gamma_{n+2} \ldots \gamma_{n+r},$$

Teorema 5.°: Es condición necesaria y suficiente para que el producto $\Pi(1+c_\lambda)$ sea absolutamente convergente que lo sea la serie Σc_λ (1).

Análogamente a lo que ocurre en las series, se verifica paralos productos infinitos el

Teorema 6.°: Si se varía de cualquier modo el orden de los factores de un producto *absolutamente* convergente, el producto continúa siendo convergente y conserva el mismo valor (2).

Aparte estos productos de factores constantes, necesitamos —en perfecta correspondencia con las consideraciones de I, cap. VI— estudiar los productos cuyos factores son funciones de una variable compleja z, que escribiremos siempre en la forma

$$\prod_{\lambda=1}^{\infty}(1+f_\lambda(z)). \tag{3}$$

Llamaremos *campo de convergencia* de un producto de esta naturaleza el conjunto, M, de los puntos, z, que pertenecen al campo de definición de *todas* las $f_\lambda(z)$ y para los cuales

luego

$$S_r<(1+\gamma_{n+1})(1+\gamma_{n+2})\dots(1+\gamma_{n+r})-1<S_r+S_r^2+\dots+S\,;$$

por consiguiente, si el producto es convergente, el segundo miembro de esta expresión podrá ser tan pequeño como se quiera, tomando n suficientemente grande y $r\geqq 1$, y lo mismo le pasará a S_r, es decir, la serie $\Sigma\gamma_\lambda$ será convergente.

Recíprocamente, si esta serie es convergente, dado $\delta>0$ se puede encontrar un número n_0 tal que para todo $n>n_0$ y todo $r\geqq 1$ sea $\gamma_{n+1}+\gamma_{n+2}+\dots+\gamma_{n+r}=S_r<\delta$; y, por consiguiente,

$$(1+\gamma_{n+1})(1+\gamma_{n+2})\dots(1+\gamma_{n+r})-1<\delta+\delta^2+\overset{r}{\dots}+\delta=\delta\frac{1-\delta^r}{1-\delta}<\frac{\delta}{1-\delta},$$

magnitud que puede ser igual o menor que cualquier número dado $\varepsilon>0$, sin más que tomar $\delta\leqq\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$; luego, según el teorema 2.°, el producto es convergente. (*N. del T.*)

(1) Según esto, es, por ejemplo, absolutamente convergente para todo z el producto $\prod_{\lambda=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{\lambda^2}\right)$, puesto que la serie $\sum\left|\frac{z^2}{\lambda^2}\right|=|z|^2\sum\frac{1}{\lambda^2}$ es convergente.

(2) Dicho de otro modo: En los productos absolutamente convergentes se verifica la *ley conmutativa*, lo mismo que en los productos de factores en número finito; pero no se verifica en los que no son absolutamente convergentes. Por el contrario, la *ley asociativa* se verifica para todos los productos convergentes, es decir, que se pueden sustituir cuantos factores sucesivos se quiera por su producto.

Manuel Alberto del Castillo

es convergente el producto. Según esto, para todo z de M el producto tiene un valor determinado, lo cual se expresa diciendo que el producto representa en M una función (uniforme) determinada (1). Para nuestro objeto teórico-funcional es también ahora (I, § 22, teorema 3.°) de una gran importancia encontrar las condiciones a que ha de satisfacer un producto para que represente, en el campo de convergencia, *una función analítica*. Para nosotros basta el siguiente

Teorema 7.°: Sea $f_1(z), f_2(z), \dots, f_\lambda(z), \dots$ una sucesión infinita de funciones analíticas en un recinto G y tales que $\sum_{\lambda=1}^{\infty}|f_\lambda(z)|$ sea uniformemente convergente en todo recinto parcial cerrado G' (I, pág. 93). Entonces, el producto (3) es convergente en todo el campo G y representa una función analítica en él. Además, según el teorema 1.°, esta función tiene un cero en cada punto de G — y sólo en éstos — en que uno, al menos, de los factores es $=0$, y el orden de este cero es igual a la suma de los órdenes con los cuales se anulan estos factores (2).

Demostración: Sea G' un recinto parcial cerrado cualquiera de G. Por ser uniformemente convergente en G'

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty}|f_\lambda(z)|,\ \text{también lo es en el mismo recinto}\ \sum_{\lambda=m+1}^{\infty}|f_\lambda(z)|$$

para todo $m\geqq 0$ y, por tanto, el producto

$$\prod_{\lambda=m+1}^{\infty}(1+f_\lambda(z)) \tag{4}$$

(1) Así, por ejemplo, según lo dicho en la penúltima nota, el campo de convergencia de $\prod_{\lambda=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{\lambda^2}\right)$ es todo el plano z.

(2) Como resulta de la demostración, sólo se considera un número finito de factores.

es absolutamente convergente en G' y representa, en este recinto, una cierta función, que vamos a designar por $F_m(z)$. Escogiendo ahora el número m de manera que para todo $n \geq m$, todo $r \geq 1$ y todo z de G' sea siempre

$$(5) \qquad |f_{n+1}(z)| + |f_{n+2}(z)| + \ldots + |f_{n+r}(z)| < \tfrac{1}{2}$$

(cosa posible, conforme a lo dicho en I, § 21), $F_m(z)$ es función analítica en G' y diferente de 0, pues, poniendo para abreviar

$$\prod_{\lambda=m+1}^{n} (1 + f_\lambda(z)) = P_n \quad \text{y} \quad P_m = 0,$$

supuesto $n > m$, será:

$$F_m(z) = \lim_{n\to\infty} P_n$$

$$= \lim_{n\to\infty} [(P_{m+1} - P_m) + (P_{m+2} - P_{m+1}) + \ldots + (P_n - P_{n-1})],$$

$$(6) \qquad F_m(z) = \sum_{\lambda=m+1}^{\infty} (P_\lambda - P_{\lambda-1}),$$

con lo cual $F_m(z)$ está representada por una serie infinita, y aplicando los teoremas del I, § 22, como para $n > m$ es [1]

$$|P_n| \leq (1 + |f_{m+1}(z)|) \ldots (1 + |f_n(z)|)$$
$$\leq e^{|f_{m+1}(z)| + \ldots + |f_n(z)|} < e^{\frac{1}{2}} < 2,$$

los términos de esta serie, a partir del segundo, satisfacen a la limitación

$$|P_\lambda - P_{\lambda-1}| = |P_{\lambda-1}| \cdot |f_\lambda(z)| < 2|f_\lambda(z)|$$

y, por consiguiente, siendo uniformemente convergente la serie $\Sigma|f_\lambda(z)|$ en G', también lo es en el mismo recinto

[1] Para $x \geq 0$ es $1 + x \leq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots = e^x$.

la nueva serie (6) y, por tanto, la función $F_m(z)$ que define es analítica en G'. Además, es diferente de 0, pues, según (5), para $n \geq m$ es

$$|f_{n+1}(z)| < \tfrac{1}{2},$$

en G'; luego, para $\lambda \geq m + 1$, será:

$$|1 + f_\lambda(z)| \geq 1 - |f_\lambda(z)| > \tfrac{1}{2},$$

de modo que ningún factor de $F_m(z)$ puede ser nulo.

Siendo analítica $F(z)$, por ser

$$f(z) = (1 + f_1(z)) \ldots (1 + f_m(z)) \cdot F_m(z),$$

también es analítica $f(z)$ en todo punto z de G', y sólo puede anularse en uno de ellos si se anula uno de sus factores; y el orden de uno de estos ceros es entonces, en efecto, igual a la suma de los órdenes con los que estos mismos factores se anulan.

Pero si se toma un punto cualquiera, z, en G, se puede —puesto que z *eo ipso* es *punto interior* de G— escoger G' de modo que también pertenezca z a G', y, por consiguiente, todo lo dicho es aplicable a todo el recinto G, como se quería demostrar.

Análogamente al teorema 3.° de I, § 22, se podría hablar aquí de la derivada de $f(z)$; pero es preferible tomar la derivada logarítmica [1], porque no tendría sentido aplicar la derivada ordinaria de un producto al caso de infinitos factores. Para esta derivada se verifica el

Teorema 8.°: Dentro de las hipótesis del teorema 7.°, en todo punto z de G en el que sea $f(z) \neq 0$, es

[1] Es decir, el cociente de dividir la derivada ordinaria por la función primitiva. Si es $F(z) = g_1(z) \cdot g_2(z) \ldots g_k(z)$ y todos los factores son derivables y $\neq 0$ en z_0, la derivada logarítmica de $F(z)$ es

$$\frac{F'(z_0)}{F(z_0)} = \frac{g_1'(z_0)}{g_1(z_0)} + \frac{g_2'(z_0)}{g_2(z_0)} + \ldots + \frac{g_k'(z_0)}{g_k(z_0)}.$$

$$(7) \qquad \frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{f'_\lambda(z)}{1 + f_\lambda(z)};$$

es decir, la serie del segundo miembro es convergente para cada uno de estos z y da la derivada logarítmica de $f(z)$.

Demostración: Si z es un punto determinado de las condiciones dichas y se toma un recinto parcial, G', tal que contenga a z, será:

$$(8) \qquad \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{f'_1(z)}{1 + f_1(z)} + \ldots + \frac{f'_m(z)}{1 + f_m(z)} + \frac{F'_m(z)}{F_m(z)};$$

pero como la serie (6) es uniformemente convergente en G', será (I, § 22, teorema 3.°)

$$F'_m(z) = \sum_{\lambda=m+1}^{\infty} (P'_\lambda - P'_{\lambda-1}) = \lim_{n\to\infty} P'_n,$$

representando por P'_n la derivada de P_n. Por consiguiente, como $F_m(z)$ y todos los P_n para $n > m$ son diferentes de 0, es

$$\frac{F'_m(z)}{F_m(z)} = \lim_{n\to\infty} \frac{P'_n}{P_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{f'_{m+1}(z)}{1 + f_{m+1}(z)} + \ldots + \frac{f'_n(z)}{1 + f_n(z)} \right)$$

$$= \sum_{\lambda=m+1}^{\infty} \frac{f'_\lambda(z)}{1 + f_\lambda(z)},$$

lo que, junto con la igualdad (8), demuestra el teorema.

A esta serie es aplicable el

Teorema 9.°: La serie (7) es absoluta y uniformemente convergente en todo intervalo cerrado, G'', parcial de G, que no contenga ningún cero de $f(z)$, y puede, por consiguiente, ser diferenciada término a término indefinidamente.

Demostración: Como ninguno de los factores $(1 + f_\lambda(z))$ puede anularse en G'', el valor absoluto de éstos se conserva superior a una cota positiva, que podemos llamar γ_λ. Según lo dicho anteriormente, para todo $\lambda > m$, seguramente es $\gamma_\lambda > \frac{1}{2}$; luego existe un número positivo γ tal que para *todos* los λ siempre es $\gamma_\lambda > \gamma$. Por consiguiente, para todos los λ y todos los z de G'', es

$$\left| \frac{f'_\lambda(z)}{1 + f_\lambda(z)} \right| < \frac{1}{\gamma} \cdot |f'_\lambda(z)|;$$

y como de la demostración del teorema 3.° de I, § 22, se deduce que la serie $\Sigma|f'_\lambda(z)|$ es uniformemente convergente en G'', resulta de esta limitación que también la serie (7) converge uniformemente.

Una vez familiarizados con los productos infinitos, es fácil ya demostrar el teorema de Weierstrass.

Dado un número *finito* de puntos $z_1, z_2, \ldots, z_k$ y los órdenes respectivos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, el producto

$$(1) \qquad (z - z_1)^{\alpha_1} (z - z_2)^{\alpha_2} \ldots (z - z_k)^{\alpha_k}$$

es una solución del problema, de modo que en este caso queda ya resuelto. Pero si se dan *infinitos* puntos como ceros, la cosa no es tan sencilla, porque el producto análogo al (1) que se formase carecería, en general, de sentido, y esto mismo ocurriría aunque, teniendo en cuenta lo dicho al hablar de los productos infinitos, se pusiera en lugar del producto (1) el

$$(2) \qquad \left(1 - \frac{z}{z_1}\right)^{\alpha_1} \left(1 - \frac{z}{z_2}\right)^{\alpha_2} \ldots \left(1 - \frac{z}{z_k}\right)^{\alpha_k}.$$

Tenemos, pues, que proceder de otro modo, y precisamente en esta variación radica lo característico del teorema.

Como en todo recinto finito sólo puede haber un número finito de los ceros dados, éstos forman necesariamente un conjunto numerable (I, pág. 15), que, por tanto, puede ser

ordenado [1]. La numeración de estos puntos es indiferente; sin embargo, si el origen es un cero de orden α_0, lo designaremos por z_0 y, de momento, prescindiremos de él, y denotaremos los demás, en un orden determinado, por $z_1, z_2, \ldots, z_\lambda, \ldots$, y a sus órdenes correspondientes por $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\lambda, \ldots$ Los z_λ son todos, pues, diferentes de 0 y como no tienen ningún punto de acumulación propio, será:

$$z_\lambda \to \infty, \qquad |z_\lambda| \to +\infty .$$

Por consiguiente, puede darse una sucesión de números positivos enteros $k_1, k_2, \ldots, k_\lambda, \ldots$ (y esto de varios modos), de manera que la serie

$$(3) \qquad \sum_{\lambda=1}^{\infty} \alpha_\lambda \left(\frac{z}{z_\lambda}\right)^{k_\lambda}$$

sea *absolutamente* convergente para *todos* los z. Basta, en efecto, tomar, por ejemplo, $k_\lambda = \lambda + \alpha_\lambda$ [2], puesto que, cualquiera que sea el valor fijado para z, por ser $z_\lambda \to \infty$, para todos los valores suficientemente grandes de λ será:

$$\left|\frac{z}{z_\lambda}\right| < \tfrac{1}{2} \quad \text{y, por tanto [3]}, \quad \left|\alpha_\lambda \left(\frac{z}{z_\lambda}\right)^{\lambda+\alpha_\lambda}\right| < \alpha_\lambda \left(\tfrac{1}{2}\right)^{\lambda+\alpha_\lambda} < \left(\tfrac{1}{2}\right)^{\lambda},$$

lo cual demuestra que la serie es absolutamente convergente.

Elegidos con esta condición los k_λ de un modo cualquiera, pero fijo para cuanto sigue, vamos a demostrar que

$$G_0(z) = z^{\alpha_0} \cdot \prod_{\lambda=1}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{z}{z_\lambda}\right) e^{\frac{z}{z_\lambda} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_\lambda}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{k_\lambda - 1}\left(\frac{z}{z_\lambda}\right)^{k_\lambda - 1}}\right]^{\alpha_\lambda}$$

(Teorema del producto de Weierstrass)

[1] Por ejemplo, se describen las circunferencias de centro 0 y radios 1, 2, 3, ... y se ordenan los puntos atendiendo al círculo o a la corona en que estén, y si hay varios en la misma (siempre serán en número finito) éstos se ordenan con arreglo a cualquier otra circunstancia.

[2] En muchas ocasiones, hasta tomar números muy pequeños.

[3] Para todo número natural, α, es siempre $\alpha < 2^\alpha$.

representa una función entera de las propiedades pedidas [1], siempre que, si el origen no es uno de los ceros de la función, se prescinda del factor z^{α_0}, y que si hay uno de los $k_\lambda = 1$ se prescinda del factor exponencial correspondiente.

La demostración es ahora ya muy sencilla. Para poder aplicar las propiedades conocidas de los productos infinitos, ponemos cada factor del producto que consideramos en la forma $1 + f_\lambda(z)$, con lo cual, según el teorema 7.°, nos bastará demostrar que la serie

$$(4) \qquad \sum_{\lambda=1}^{\infty} |f_\lambda(z)| = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \left| \left[\left(1 - \frac{z}{z_\lambda}\right) e^{\frac{z}{z_\lambda} + \cdots + \frac{1}{k_\lambda - 1}\left(\frac{z}{z_\lambda}\right)^{k_\lambda - 1}}\right]^{\alpha_\lambda} - 1 \right|$$

es uniformemente convergente en *todo recinto finito*, pues entonces podremos tomar como recinto G de aquel teorema todo el plano, y resultará que el producto infinito y, por consiguiente, también $G_0(z)$ será una función entera; y la segunda parte del mismo teorema 7.°, teniendo en cuenta la forma de los factores de $G_0(z)$, demuestra inmediatamente que $G_0(z)$ tiene las propiedades pedidas. La convergencia uniforme de la serie (4) en el círculo de centro 0 y radio R (arbitrario, pero positivo y fijo para cuanto sigue) resulta del siguiente modo:

Como la serie (3) converge también para $z = R$ y es $z_\lambda \to \infty$, se puede tomar m suficientemente grande para que para todo $\lambda < m$ se conserve

$$(5) \qquad \alpha_\lambda \left|\frac{R}{z_\lambda}\right|^{k_\lambda} < \frac{1}{2} \quad \text{y también,} \quad \frac{R}{|z_\lambda|} < \frac{1}{2}.$$

[1] Las exponenciales contenidas en el paréntesis cuadrado *hacen* convergente el producto, que, sin ellas, en general sería divergente. Se les suele llamar, por esta razón, *factores generadores de convergencia*.

Entonces si, por el momento, sustituímos $\frac{z}{z_\lambda}$ por u, k_λ por k y α_λ por α, el término que ocupa el lugar λ en la serie (4) tiene, para $\lambda > m$, la forma

$$\left|\left[(1-u)e^{u+\frac{u^2}{2}+\dots+\frac{u^{k-1}}{k-1}}\right]^{\alpha}-1\right|, \text{ siendo } \begin{cases}|u|<\frac{1}{2}\\ \alpha|u|^k<\frac{1}{2}.\end{cases}$$

Ahora bien, para $|u| < 1$ se puede poner (1)

$$1-u=e^{-u-\frac{u^2}{2}-\frac{u^3}{3}-\dots};$$

luego aquel término será

$$=\left|e^{\alpha\left(-\frac{u^k}{k}-\frac{u^{k+1}}{k+1}-\dots\right)}-1\right|,$$

y, por tanto (2)

$$\leq e^{\alpha\left(\frac{|u|^k}{k}+\frac{|u|^{k+1}}{k+1}+\dots\right)}-1\leq e^{\alpha|u|^k(1+|u|+|u|^2+\dots)}-1,$$

y, por ser $|u| < \frac{1}{2}$, el término en cuestión será

$$< e^{2\alpha|u|^k}-1,$$

cantidad que, teniendo presente que para $x \geq 0$ siempre es $e^x - 1 \leq x\,e^x$, (3), será a su vez

$$\leq 2\alpha\,|u|^k e^{2\alpha|u|^k} < 6\,\alpha\,|u|^k,$$

(esto último porque, según (5), el exponente de e es menor que 1). Resulta, pues, que, para todos los valores suficientemente grandes de λ, es

(1) Pues la suma de la serie que figura en el exponente en el segundo miembro es el valor principal de $\log(1-u)$. También puede verse esto, por ser iguales los dos miembros para $u = 0$ y ser también iguales sus derivadas logarítmicas para todos los $|u| < 1$, según la propiedad enunciada en la nota de la página 168.

(2) Pues, para todo número complejo w, siempre es

$$|e^w-1|\leq|w|+\left|\frac{w^2}{2!}\right|+\dots=e^{|w|}-1.$$

(3) $$e^x-1=x+\frac{x^2}{2!}+\dots=x\left(1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\dots\right)\leq xe^x.$$

$$|f_\lambda(z)|<6\,\alpha_\lambda\left|\frac{z}{z_\lambda}\right|^{k_\lambda}<6\,\alpha_\lambda\left|\frac{R}{z_\lambda}\right|^{k_\lambda};$$

y estos son números positivos, cuya suma, por la manera que han sido escogidos los k_λ, es convergente y, por consiguiente, aplicando el criterio de convergencia de Weierstrass (I, § 21), la serie $\sum|f_\lambda(z)|$ converge uniformemente en el círculo de centro 0 y radio R, lo cual completa la demostración del teorema del producto de Weierstrass.

Problemas: 1.° Demostrar los teoremas 5.° y 6.°

2.° Demostrar la convergencia de los productos:

a) $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)$; b) $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right)$;

c) $\prod_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n^3-1}{n^3+1}\right)$.

y encontrar su valores.

3.° Determinar el campo de convergencia de los siguientes productos:

a) $\prod_{n=1}^{\infty}(1-z^n)$; b) $\prod_{n=0}^{\infty}(1+z^{2^n})$; c) $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{n^z}{1}\right)$;

d) $\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p^z}\right)$, si se dan a p los valores de todos los números primos,

e) $\prod_{n=1}^{\infty}(1+c_n z)$, si Σc_n es una serie absolutamente convergente.

4.° Demostrar las fórmulas:

a) $\prod_{p}\frac{1}{1-\frac{1}{p^z}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}$ (ténganse en cuenta 3 c y d),

b) $\Pi(1+z^{2^n})=\frac{1}{1-z}$ (ténganse en cuenta 3 b).

5.° ¿Qué valores tienen los coeficientes μ_n del segundo miembro de la igualdad

$$\prod_p \left(1 - \frac{1}{p^z}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n}{n^z}$$

cuando en el primero se atribuyen a p los valores de todos los números primos?

6.° Si $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ es una sucesión numérica cualquiera, para la cual $z_n \to \infty$ y son todos los $z_n \neq 0$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{z_n}\right)^{[\log n]}$$

converge para todos los valores de z. ¿Qué números pequeños pueden tomarse, en consecuencia, siempre como k_λ en lugar de los utilizados en el texto en la demostración del teorema del producto de Weierstrass?

7.° Demostrar la siguiente aplicación del teorema del producto de Weierstrass al recinto del círculo unidad:

Sea $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ una sucesión cualquiera de puntos distintos situados en el *interior* del círculo unidad y que, dentro de este círculo, no tienen ningún punto de acumulación (por consiguiente, sólo lo tienen en la circunferencia), y sea $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ una sucesión de números enteros y positivos arbitrarios. Entonces se puede construir siempre una función $f(z)$ — en forma análoga al producto de Weierstrass — que es analítica en el círculo unidad y que en él tiene como ceros todos los puntos z_n (y sólo éstos) con los órdenes respectivos α_n.

8.° Aplicando el teorema anterior, formar funciones que tengan como frontera natural la circunferencia del círculo unidad.

§ 3. Ejemplos de productos de Weierstrass

Como la formación de las funciones enteras que tengan ceros dados es extraordinariamente sencilla — únicamente la demostración completa es algo enojosa — se pueden presentar fácilmente cuantos ejemplos se quiera. El caso más simple es aquel en que los ceros y sus órdenes son tales que para nuestra sucesión $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ la serie

$$\sum \frac{\alpha_\lambda}{z_\lambda} \text{ y, por tanto, para todo } z, \text{ la } \sum \alpha_\lambda \left(\frac{z}{z_\lambda}\right)$$

es absolutamente convergente. Pues entonces todos los k_λ pueden ser tomados $= 1$, y resulta la función en la forma bien sencilla

$$G_0(z) = z^{\alpha_0} \cdot \prod_{\lambda=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_\lambda}\right)^{\alpha_\lambda}$$

Por ejemplo, si los puntos $0, 1, 4, 9, \ldots \lambda^2, \ldots$ han de ser ceros de primer orden, se tiene en seguida

$$G(z) = e^{h(z)} \cdot z \cdot \prod_{\lambda=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda^2}\right)$$

como solución más general del problema, si $h(z)$ es una función entera arbitraria.

Si los puntos $1, 8, \ldots, \lambda^3, \ldots$ son ceros cuyos respectivos órdenes son $1, 2, \ldots, \lambda, \ldots$, la función más general que satisface a la cuestión es

$$G(z) = e^{h(z)} \cdot \prod_{\lambda=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda^3}\right)^{\lambda}.$$

Aparte estos ejemplos, que fácilmente pueden multiplicarse, vamos a dar algunos otros, que son aplicaciones de particular interés desde el punto de vista teórico-funcional.

Ejemplo 1.°: sen πz. Se trata de formar una función entera que tenga todos los puntos reticulares (es decir, $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) como ceros de primer orden. Numeramos estos puntos, por ejemplo, del siguiente modo:

$z_0 = 0, z_1 = +1, z_2 = -1, \ldots z_{2\nu-1} = \nu, z_{2\nu} = -\nu, \ldots (\nu = 1, 2, \ldots)$

Entonces, la serie

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} \left(\frac{z}{z_\lambda}\right)^2 = z^2 \cdot \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{z_\lambda^2}$$

converge absolutamente para todo z y, por consiguiente, se pueden tomar todos los $k_\lambda = 2$. Resulta, así, inmediatamente, como solución más general,

$$G(z) = e^{h(z)} \cdot z \cdot \prod_{\lambda=1}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{z}{z_\lambda}\right) e^{\frac{z}{z_\lambda}}\right]$$

$$= e^{h(z)} \cdot z \cdot \prod_{\nu=1}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{z}{\nu}\right) e^{\frac{z}{\nu}}\right] \left[\left(1 + \frac{z}{\nu}\right) e^{-\frac{z}{\nu}}\right]$$

$$= e^{h(z)} \cdot z \cdot \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\nu^2}\right). \quad (^1)$$

Como, evidentemente, también la función sen πz es solución del problema, necesariamente debe estar contenida en la forma encontrada, es decir, tiene que haber una función entera, que vamos a designar por $h_0(z)$, tal que sea

$$(1) \qquad \operatorname{sen} \pi z = e^{h_0(z)} \cdot z \cdot \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\nu^2}\right).$$

Si logramos encontrar esta función $h_0(z)$, habremos encontrado, según lo dicho en el § 1 (pág. 170), la *representación factorial* de sen πz.

Del conocimiento de los ceros *sólo*, seguramente no se puede deducir la forma de la función $h_0(z)$, sino que para obtenerla tendremos que acudir a otras propiedades de la función particular sen πz, por ejemplo, a su desarrollo en serie, a sus propiedades de periodicidad, a la representación conforme a que da origen, a su comportamiento en el infinito, o a otras . Nos limitaremos a dar esquemáticamente un método para la determinación de $h_0(z)$ (²).

En primer término se ve que $h_0''(z)$ es una constante. En efecto, de (1), teniendo presente el teorema 8.º del § 2, se deduce

$$(2) \qquad \pi \operatorname{ctg} \pi z = h_0'(z) + \frac{1}{z} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-\nu} + \frac{1}{z+\nu}\right),$$

y derivando dos veces (teorema 9.º)

$$-\frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2 \pi z} = h_0''(z) - \frac{1}{z^2} - \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(z-\nu)^2} + \frac{1}{(z+\nu)^2}\right),$$

(¹) Según la última nota de la pág. 174, pueden efectuarse estas transformaciones.

(²) Se trata aquí de una *cuestión típica*: se tienen dos expresiones analíticas, como $A_1(z)$ y $A_2(z)$ (en el caso anterior las conocidas expresiones de sen πz, la serie potencial, de una parte, y el producto infinito $z \prod \left(1 - \frac{z^2}{\nu^2}\right)$ de otra). La marcha de la investigación sugiere la idea de que ambas expresiones representan la misma función: ¿cómo demostrarlo? La determinación de $h_0(z)$, hecha en el texto, muestra que, aun en un caso aparentemente tan sencillo como éste, no es fácil la demostración que se pretende.

que, más brevemente, puede escribirse así:

$$h_0''(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-\nu)^2} - \frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2 \pi z}.$$

Esta relación se verifica en todo recinto cerrado que no contenga ningún punto reticular. Sustituyendo en su segundo miembro $z + 1$ en lugar de z, permanece invariable, puesto que $\operatorname{sen}^2 \pi z$ tiene el período $+1$ y es

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z+1-\nu)^2} = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-(\nu-1))^2} = \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-\mu)^2};$$

luego $h_0(z)$ es una función entera con el período $+1$. Para demostrar que es $h_0''(z) = \text{const.}$, bastará demostrar, conforme a lo dicho en I, § 30, 1.º, que $h_0''(z)$ no puede ser tan grande como se quiera, y para ello, atendida la periodicidad de $h_0''(z)$, será suficiente probar que existe una constante K, tal que para todos los puntos $z = x + iy$, para los cuales es $0 \leq x \leq 1$ y $|y| \geq 1$, se verifica siempre $|h_0''(z)| < k$. Pero, desde luego, para estos z es

$$\left| \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-\nu)^2} \right| \leq \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x-\nu)^2 + y^2} \leq 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + y^2}$$

y como $\operatorname{sen} \pi z = \frac{1}{2i}(e^{i\pi z} - e^{-i\pi z})$, para todos aquellos z será

$$\left|\frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2 \pi z}\right| = \frac{4\pi^2}{e^{2\pi y} + e^{-2\pi y} - 2\cos 2\pi x} < \frac{4\pi^2}{e^{2\pi|y|} - 2};$$

luego

$$|h_0''(z)| < 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + y^2} + \frac{4\pi^2}{e^{2\pi|y|} - 2},$$

y, para todo $|y| \geq 1$, esta expresión se conserva inferior a un número fijo; por consiguiente, es

$$h_0(z) = \text{const.} = c'';$$

pero como, según la limitación antes establecida, $|h_0''(z)|$ puede ser tan pequeño como se quiera, si se toma $|y|$ suficientemente grande, necesariamente ha de ser $c'' = 0$. Resulta, pues,

$$h_0''(z) = 0, \qquad h_0'(z) = \text{const.} = c'$$

y, por tanto, según (2)

$$\pi \operatorname{ctg} \pi z = c' + \frac{1}{z} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - \nu^2},$$

igualdad que, por sustitución de z por $-z$, demuestra que es $c' = -c'$ es decir, $c' = 0$. Según esto, también $h_0^{(z)}$ y $e^{h_0(z)}$ son constantes; luego

$$\operatorname{sen} \pi z = c \cdot z \cdot \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\nu^2}\right),$$

de donde, dividiendo por z y haciendo tender z a 0, se deduce $\pi = c$. Se obtiene así, en definitiva, la *representación factorial* de sen πz — válida para todo z —:

$$\operatorname{sen} \pi z = \pi z \cdot \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\nu^2}\right).$$

Ejemplo 2.º: La función σ de Weierstrass. Sean ω y ω' dos números diferentes de cero, cuyo cociente no es real (en otros términos, dos puntos no alineados con el origen). Se trata de formar una función entera que en todos los puntos de la forma

$$k\omega + k'\omega' \quad \begin{cases} k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \\ k' = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{cases}$$

— pero en ningún otro punto — tenga ceros de primer orden. Uniendo el origen con los puntos ω y ω' por medio de las rectas L y L' (fig. 9) y trazando por sus puntos respectivos $k\omega$ y $k'\omega'$ paralelas a la otra recta, se obtienen dos haces paralelos, y los puntos de intersección de sus rayos son los ceros dados, $k\omega + k'\omega'$. Aparecen, pues, éstos como *puntos reticulares de una red paralelogramática* caracterizada por los puntos ω y ω'.

El conjunto de los puntos reticulares considerado en I, § 2, y designado allí por M_1 es el caso particular del aquí indicado, correspondiente a ser $\omega = 1, \omega' = i$. La numeración de los puntos la podemos hacer ahora como allí se hizo — a los cuadrados de entonces corresponden ahora paralelogramos; en la figura se ha marcado con línea de trazos el contorno de estos paralelogramos —. La sucesión de los puntos comienza, por consiguiente, así:

$$0,\ \omega,\ \omega + \omega',\ \omega',\ -\omega + \omega',\ -\omega,\ -\omega - \omega',\ -\omega',$$
$$\omega - \omega',\ 2\omega,\ 2\omega + \omega',\ \omega + 2\omega', \ldots$$

y en esta sucesión, ya fijada, designamos los puntos por $z_0, z_1, z_2, \ldots$ Mostraremos primero que la serie

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} \left(\frac{z}{z_\lambda}\right)^3$$

es absolutamente convergente para todo valor de z.

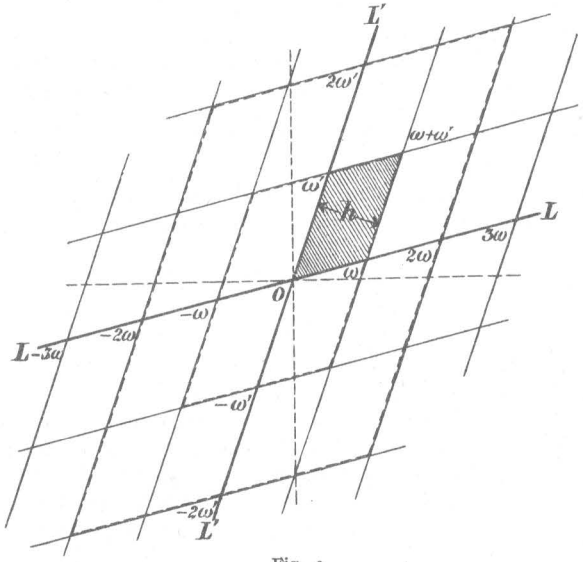

Fig. 9

Numerando los paralelogramos a lo largo de cuyos perímetros hemos ordenado los puntos reticulares, atendiendo a su magnitud, en general, sobre el p-simo hay $8p$ de estos puntos reticulares, cuyos valores absolutos son $\geqq ph$, si se designa por h la menor de las alturas del *paralelogramo fundamental* que tiene los vértices $0, \omega, \omega + \omega', \omega'$. La parte de la serie $\sum \left|\frac{z}{z_\lambda}\right|^3$ debida a los puntos del p-simo paralelogramo, tiene, pues, un valor

$$\leq 8p \left(\frac{|z|}{ph}\right)^3 = \frac{8|z|^3}{h^3} \cdot \frac{1}{p^2};$$

y, por tanto, como la serie $\sum \frac{1}{p^2}$ es convergente, la propuesta converge absolutamente para todo valor de z. Basta, por consiguiente, tomar todos los $k_\lambda = 3$ en el producto de Weierstrass; y resulta así, con la significación atribuída a z_λ, que

$$G_0(z) = z \cdot \prod_{\lambda=1}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{z}{z_\lambda}\right) e^{\frac{z}{z_\lambda} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_\lambda}\right)^2} \right]$$

es una función entera con las propiedades pedidas. En la teoría de Weierstrass de las funciones elípticas, se llama a esta función G_0 la **función sigma**, correspondiente al par de períodos (ω, ω'), y se la denota con el símbolo

$$\sigma(z) = \sigma(z \mid \tfrac{1}{2}\omega, \tfrac{1}{2}\omega').$$

La convergencia absoluta del producto hace (§ 2, teorema 6.º) que pueda alterarse el orden de los factores, de modo que se puede escribir, sin necesidad de fijar el orden en que han de ser considerados,

$$\sigma(z \mid \tfrac{1}{2}\omega, \tfrac{1}{2}\omega')$$

$$= z \cdot \prod_{k,k'}{}' \left[\left(1 - \frac{z}{k\omega + k'\omega'}\right) e^{\frac{z}{k\omega + k'\omega'} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{k\omega + k'\omega'}\right)^2} \right],$$

en cuya expresión, k y k' toman, independientemente uno de otro, todos los valores enteros $\gtreqless 0$ pero *sin anularse simultáneamente*. Esta circunstancia es la que indica el acento puesto al símbolo de producto.

Ejemplo 3.º: Nos proponemos, finalmente, construir una función entera que tenga un cero de primer orden en cada uno de los puntos

$$z = 0,\ z_1 = -1,\ z_2 = -2, \ldots, z_\lambda = -\lambda, \ldots$$

y que no se anule en ningún otro. También aquí basta, evidentemente, tomar todos los $k_\lambda = 2$, de modo que la función entera más general de las propiedades pedidas es la

$$G(z) = e^{h(z)} \cdot z \cdot \prod_{\lambda=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{z}{\lambda}\right) e^{-\frac{z}{\lambda}} \right].$$

Esta función está íntimamente relacionada con la llamada **función gamma** (de **Euler**), ya estudiada, para el caso de argumento real, en los cursos elementales de Cálculo integral, y que para cualquier valor complejo de $z \neq 0, -1, -2, \ldots$ ha sido definida por Gauss como el valor límite [1]

$$\Gamma(z) = \lim_{n \to \infty} \frac{n!\, n^z}{z(z+1)(z+2)\ldots(z+n)} \qquad (n^z = e^{z \log n} \text{ real positivo}).$$

Es fácil ver que existe este límite para todos los valores indicados de z. En efecto, escribiendo el valor recíproco de la expresión cuyo límite nos ocupa bajo la forma

$$e^{-z \log n} \cdot z \cdot \left(1 + \frac{z}{1}\right)\left(1 + \frac{z}{2}\right) \ldots \left(1 + \frac{z}{n}\right),$$

será

$$= e^{\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n\right) z} \cdot z \cdot \prod_{\lambda=1}^{n} \left[\left(1 + \frac{z}{\lambda}\right) e^{-\frac{z}{\lambda}} \right].$$

Pero se sabe que existe el límite [2]

$$\lim_{n \to \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) - \log n \right] = C;$$

---

(1) Esta función es, después de las elementales, una de las más importantes del análisis. En las investigaciones más variadas de la Matemática pura y aplicada, desde la Teoría de números hasta la Física matemática, aparece constantemente, de modo que es absolutamente indispensable un completo conocimiento de sus propiedades analíticas.

El primer estudio de esta función conduce al de *interpolar* en la sucesión de las factoriales, $0! (= 1), 1!, 2!, \ldots$, es decir, unir por medio de una curva, lo más sencilla posible, los puntos $(\lambda, \lambda!)$ o (como siguiendo a Euler se acostumbra escribir) de coordenadas $x = \lambda + 1$, $y = \lambda!$ $(\lambda = 0, 1, 2, \ldots)$; o, de otro modo: Encontrar una función real $F(x)$, de la variable real x, lo más sencilla posible, que para $x = \lambda + 1$ tenga e valor $y = \lambda!$. Euler dió, como solución, la integral $\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$, convergente para todo $R(x) > 0$, y Gauss el valor límite arriba indicado. Ambas soluciones dan la misma función para $R(x) > 0$; omitimos la demostración de esto por falta de espacio. Una demostración muy elemental es la dada por Pringsheim en el tomo XXXI de Mathematische Annalen.

(2) Por medio de la interpretación geométrica de la integral como expresión del área comprendida entre una curva plana, el eje x y dos ordenadas, se ve inmediatamente que es $\frac{1}{n} > \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} > \frac{1}{n+1}$, y, por tanto, $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} > \frac{1}{n} - \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} > 0$.

Designando esta última diferencia por γ_n resulta, pues, $0 < \gamma_n < \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$; luego $\sum \gamma_n = C$ es convergente y $0 < C < 1$. Por consiguiente,

luego la última expresión puesta, cuando $n \to \infty$, tiende (para *cualquier* valor de z) al valor de la función entera

$$K(z) = e^{Cz} \cdot z \cdot \prod_{\lambda=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{z}{\lambda}\right) e^{-\frac{z}{\lambda}} \right],$$

que resulta de la solución del último ejemplo estudiado, cuando se toma $h(z) = Cz$; y como esta función seguramente no se anula para

$$z \neq 0, -1, -2, \ldots$$

el valor límite de Gauss existe y es $= \frac{1}{K(z)}$. Este límite define, por consiguiente, una función analítica que es el valor recíproco de la función entera $K(z)$. (Pueden verse más pormenores acerca de esta función en el § 6, ejemplo 3.°)

Problemas: 1.° Deducir de la expresión factorial del *seno* los valores de los siguientes productos:

a) $$\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots$$

(Producto de Wallis)

b) $$\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{14}{13} \cdots$$

c) $$2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{14}{15} \cdot \frac{16}{15} \cdots$$

2.° Escribir las representaciones factoriales de las siguientes funciones:

a) $e^z - 1$; b) $e^z - e^{z_0}$; c) $\operatorname{sen} z - \operatorname{sen} z_0$; d) $\cos z - \cos z_0$.

3.° Demostrar que existen funciones enteras que en puntos dados arbitrariamente, $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$, sin otra condición que la de no tener ningún punto de acumulación a distancia finita, tienen valores prefijados

$$w_1, w_2, \ldots, w_n \ldots$$

$$(\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_{n-1}) = \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1}\right) - \int_1^n \frac{dx}{x} \to C;$$

luego también, por ser $\frac{1}{n} \to 0$, y $\int_1^n \frac{dx}{x} = \log n$, será:

$$\left[\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) - \log n\right] \to C.$$

El número C ha recibido el nombre de *constante de Euler* o de *Mascheroni*; su valor, comprendido entre 0 y 1, es aproximadamente $= 0{,}5772156649\ldots$

CAPÍTULO II

FUNCIONES MEROMORFAS

§ 4. El teorema de Mittag-Leffler

Las funciones racionales fraccionarias están completamente caracterizadas de un modo teórico-funcional puro por los teoremas 1.°, 2.° y 3.° del libro I, § 36. Análogamente a lo hecho en el capítulo anterior, resumimos sus propiedades fundamentales en estos dos enunciados:

(A) Toda función racional (fraccionaria) admite una *descomposición en fracciones racionales simples* que pone de manifiesto sus polos y las partes principales correspondientes.

Así, si $f_0(z)$ es la función racional dada, y $z_1, z_2, \ldots, z_k$ sus polos con las partes principales correspondientes

$$(1) \qquad h_\lambda(z) = \frac{a_{-1}^{(\lambda)}}{z - z_\lambda} + \frac{a_{-2}^{(\lambda)}}{(z - z_\lambda)^2} + \ldots + \frac{a_{-\alpha_\lambda}^{(\lambda)}}{(z - z_\lambda)^{\alpha_\lambda}},$$

$$(\lambda = 1, 2, \ldots, k),$$

se puede poner, designando por $g_0(z)$ una función *entera* racional adecuada,

$$(2) \qquad f_0(z) = g_0(z) + h_1(z) + h_2(z) + \ldots + h_k(z).$$

De esta descomposición en fracciones simples se deduce inmediatamente que cualquiera otra función racional, $f(z)$ que tenga los mismos polos con las mismas partes principales, sólo puede diferir de la $f_0(z)$ en el sumando $g_0(z)$, y, además

que tanto estos polos como sus partes principales pueden ser dados previamente; en otros términos:

(B) Se puede formar siempre funciones racionales cuyos polos con sus partes principales hayan sido prefijados, y esto en forma de una descomposición en fracciones simples que pone de manifiesto los polos y sus partes principales, y conocida una función particular de esta especie, de ella se deduce la más general mediante la adición de una función racional entera arbitraria.

Estas dos propiedades fundamentales de las funciones racionales subsisten cuando se trata de la clase más general de las funciones meromorfas, cuya definición hemos indicado ya en la Introducción, y que ahora vamos a dar de modo más preciso.

Definición: Se dice que una función es *meromorfa* — prescindiendo de su comportamiento en el infinito — si en todo el plano no tiene otras singularidades que, a lo más, polos.

De esta definición resulta en seguida el

Teorema 1.°: Toda función meromorfa sólo puede tener un *número finito* de polos en cualquier recinto finito.

Pues si así no fuera, en dicho recinto habría un punto de acumulación de polos, el cual sería singular, pero no polo

Según esto, las funciones racionales son caso particular de las funciones meromorfas, y lo mismo puede decirse de las funciones enteras.

La función $\frac{1}{\operatorname{sen} z}$ es meromorfa, pues a distancia finita sólo tiene polos, todos de primer orden, en los puntos en que se anula sen z. Lo mismo se ve que $\cot z = \frac{1}{\operatorname{sen} z} \cdot \cos z$ y $\operatorname{tg} z$ son funciones meromorfas. — Más general: si $G(z)$ es una función entera cualquiera, su valor recíproco, $1 : G(z)$, es una función meromorfa (así, por ejemplo; la función $\Gamma(z) = 1 : K(z)$, considerada al final del artículo anterior). Pues $1 : G(z)$ tiene polos en todos los puntos en que se anula $G(z)$, y sólo en ellos, y no tiene ninguna otra singularidad; y órdenes de sus polos son los mismos de los ceros de $G(z)$. — Si $G_1(z)$ es una segunda función entera que no tiene ningún cero común con $G(z)$, se ve inmediatamente que también $G_1(z) : G(z)$ es una función meromorfa que tiene (¹) los mismos polos y órdenes que $1 : G(z)$ (pero, en general, con diferentes partes principales).

Manuel Alberto del Castillo

Nos proponemos resolver en primer término el **problema** que corresponde a la propiedad (B), a saber: averiguar si se puede, y en caso afirmativo de qué modo, formar una función que tenga ceros dados con partes principales también conocidas, y saber hasta qué punto queda determinada la función de esta manera.

Esto último se ve en seguida. Si $M_0(z)$ y $M(z)$ son dos funciones meromorfas que tienen coincidentes sus polos y las partes principales que les corresponden, su diferencia es una función *entera*, evidentemente; por lo tanto, se pasa de una a otra por la adición de una función entera («función meromorfa sin polos»). Y como, recíprocamente, la agregación de una función de esta naturaleza no hace variar los polos ni sus partes principales, podemos decir:

Teorema 2.°: Si $M_0(z)$ es una función meromorfa particular y $G(z)$ una función entera arbitraria,

$$M(z) = M_0(z) + G(z)$$

es la función meromorfa *más general* que tiene los mismos polos y partes principales correspondientes que $M_0(z)$.

Nos queda, pues, sólo averiguar si puede formarse y, caso afirmativo, cómo, una función meromorfa particular con polos dados cualesquiera.

Según el teorema 1.°, el conjunto de estos polos no puede tener ningún punto de acumulación a distancia finita; excluyendo esta posibilidad, el problema propuesto queda resuelto sin ninguna otra limitación, mediante el teorema que sigue, que lleva el nombre de su descubridor:

(¹) Este último ejemplo se refiere ya al caso más general, por verificarse el **teorema:** Toda función meromorfa, $f(z)$, puede representarse por el cociente de dos funciones enteras sin ceros comunes. En efecto, como los polos de $f(z)$ no pueden tener ningún punto de acumulación propio, según el teorema de Weierstrass se puede formar una función entera $G(z)$ cuyos *ceros* coincidan en posición y orden con los de $f(z)$; por consiguiente, el producto $f(z) \cdot G(z)$ es, evidentemente, una función *entera*, $G_1(z)$, y, por tanto, $f(z) = G_1(z) : G(z)$.

Teorema de Mittag-Leffler: Dado un conjunto de puntos cualquiera (finito o infinito), que no tiene ningún punto de acumulación propio y asignada a cada punto del conjunto una parte principal, es decir, una función racional de la forma (1), *existe siempre una función meromorfa que en aquellos puntos tiene polos con las partes principales asignadas y fuera de ellos es regular*. Esta función se puede dar en forma de suma de fracciones simples (la fórmula correspondiente está en la página 198), de las cuales se deducen inmediatamente los polos y sus partes principales [análogamente que en (2)]. Obtenida esta función, según el teorema 2.°, si la designamos por $M_0(z)$ y $G(z)$ es una función entera arbitraria,

$$M(z) = M_0(z) + G(z)$$

es la función más general que satisface a las condiciones del problema.

Este teorema resuelve la cuestión correspondiente a la segunda propiedad de las funciones racionales. Si por el momento lo suponemos demostrado, de él se deduce inmediatamente la solución del problema correspondiente a la propiedad (A); pues si $M(z)$ es una función meromorfa cualquiera dada, el conjunto de sus polos no tiene ningún punto de acumulación a distancia finita; luego, según el teorema de Mittag-Leffler, se puede formar otra función meromorfa $M_0(z)$ que tenga los mismos polos y partes principales que la $M(z)$, en forma de suma de fracciones simples que ponen de manifiesto estos polos y partes principales, y entonces, según el teorema 1.°, si $G_0(z)$ es una función entera convenientemente elegida,

$$M(z) = M_0(z) + G_0(z)$$

será, en efecto, una descomposición en fracciones simples de la función dada $M(z)$, que permite reconocer inmediatamente sus polos y las partes principales que les corresponden.

Problemas: 1.° Demostrar que $\cot z$ y $\dfrac{2i}{e^{2iz}-1}$ son dos funciones meromorfas que tienen los mismos polos con las mismas partes principales. Según el teorema 2.°, la primera debe diferenciarse de la segunda en una función entera. ¿Qué función es ésta?

2.° El mismo problema para las funciones

$$\frac{1}{2i\cos z} \quad \text{y} \quad \frac{\operatorname{sen} z}{e^{2iz}+1}.$$

§ 5. Demostración del teorema de Mittag-Leffler

Si la función que se trata de formar no ha de tener ningún polo, toda función entera es solución del problema. Si ha de tener un número finito de polos $z_1, z_2, \ldots, z_k$ con las partes principales $h_1(z), h_2(z), \ldots, h_k(z)$, evidentemente

$$M_0(z) = h_1(z) + h_2(z) + \ldots + h_k(z)$$

es una solución. Pero si ha de tener infinitos polos dados, la solución no aparece tan sencilla, porque siguiendo el camino marcado por la analogía se llegaría, en general, a una serie divergente. Sin embargo, análogamente a lo hecho en el § 2, modificando convenientemente los términos de la serie se puede *engendrar* la convergencia.

Para ello, numeramos los polos del mismo modo que hicimos en el § 2, pág. 180, al tratar de los ceros; y si el origen es polo, lo designamos por z_0 y prescindimos de él por el momento. Sean $h_0(z), h_1(z), \ldots, h_\lambda(z) \ldots$ [suponiendo $h_\lambda(z)$ de la forma dada en la página 193, fórmula (1)] las partes principales correspondientes a los polos $z_0, z_1, \ldots, z_\lambda \ldots$; todas estas funciones $h_\lambda(z)$ para $\lambda = 1, 2, 3, \ldots$ son analíticas en el entorno del origen, y sus desarrollos en serie para este entorno,

$$h_\lambda(z) = a_0^{(\lambda)} + a_1^{(\lambda)} z + a_2^{(\lambda)} z^2 + \ldots, \quad (\lambda = 1, 2, \ldots),$$

son convergentes para todos los $|z|<|z_\lambda|$ y, por consiguiente, *uniformemente* convergentes para todos los $|z| \leq \frac{1}{2}|z_\lambda|$. Se puede, pues (para todo $\lambda = 1, 2, 3, \ldots$), determinar un número entero, n_λ, tal que el valor absoluto del resto de la serie de potencias formado por los términos que siguen al n_λ-simo sea menor que cualquier número positivo dado, por ejemplo, $< \frac{1}{2^\lambda}$. Si designamos por $g_\lambda(z)$ el comienzo de la serie, $g_\lambda(z)$ será una función entera racional de grado n_λ

$$g_\lambda(z) = a_0^{(\lambda)} + a_1^{(\lambda)} z + \ldots + a_{n_\lambda}^{(\lambda)} z^{n_\lambda} \qquad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots)$$

y para todo $|z_\lambda| \leq \frac{1}{2}|z_\lambda|$ es

$$|h_\lambda(z) - g_\lambda(z)| < \frac{1}{2^\lambda};$$

luego

$$M_0(z) = h_0(z) + \sum_{\lambda=1}^{\infty} [h_\lambda(z) - g_\lambda(z)]$$

(descomposición en fracciones simples, de Mittag-Leffler)

es una función meromorfa que satisface las condiciones del teorema. [Cuando el origen no es polo, se prescinde, naturalmente, del sumando $h_0(z)$.]

Para terminar la demostración sólo nos queda hacer ver que la expresión del segundo miembro define una función analítica que en todo recinto finito, por ejemplo, en el círculo de radio R que tiene el centro en el origen, tiene las singularidades dadas y ninguna otra.

Pero si tomamos m suficientemente grande para que, cualquiera que sea $\lambda > m$, siempre sea $|z_\lambda| > 2R$, o, por tanto, $R < \frac{1}{2}|z_\lambda|$ (lo cual es posible por ser $|z_\lambda| \to +\infty$), para todos los $|z| \leq R$ y todos los $\lambda > m$, será siempre

$$|z| < \tfrac{1}{2}|z_\lambda| \text{ y, en consecuencia, } |h_\lambda(z) - g_\lambda(z)| < \frac{1}{2^\lambda}.$$

Por consiguiente, la serie

$$\sum_{\lambda=m+1}^{\infty} [h_\lambda(z) - g_\lambda(z)]$$

para todos los $|z| \leq R$ es *uniformemente* (y absolutamente) convergente; luego, por ser sus términos funciones analíticas para $|z| \leq R$ (pues los polos de $h_\lambda(z)$, siendo $\lambda > m$ están *fuera* del círculo $|z| = R$), define una función analítica en dicho círculo. Designémosla por $F_m(z)$; tendremos, evidentemente, que también la función

$$M_0(z) = h_0(z) + \sum_{\lambda=1}^{m} [h_\lambda(z) - g_\lambda(z)] + F_m(z)$$

es analítica en el círculo de centro 0 y radio R, excepto en los puntos z_λ contenidos en él, en los cuales tiene polos con las partes principales $h_\lambda(z)$; y como R lo hemos tomado completamente arbitrario, este mismo resultado se extiende a todo recinto finito y, por consiguiente, $M_0(z)$ es, en efecto, una función meromorfa de las propiedades pedidas.

De la misma demostración se infiere que basta tomar el grado, n_λ, de la función racional entera $g_\lambda(z)$ [comienzo del desarrollo en serie de $h_\lambda(z)$] suficientemente grande para que, dado cualquier $R > 0$, los términos $|h_\lambda(z) - g_\lambda(z)|$ para todos los $|z| \leq R$ se conserven finalmente (es decir, para valores suficientemente grandes de λ), menores que los términos de una serie convergente de términos positivos.

Problemas: 1.º ¿Subsiste el teorema de Mittag-Leffler cuando las partes principales dadas contienen infinitos términos de exponente negativo? ¿Cómo se enuncia entonces y se demuestra el teorema?

2.º ¿Puede también darse, en el teorema de Mittag-Leffler, para todos los puntos z_λ (o para algunos, o para uno) la parte con potencias de exponente positivo del desarrollo de Laurent? o ¿se puede, al menos, dar un número finito de sus términos?

3.º El teorema de Mittag-Leffler puede aplicarse al círculo unidad lo mismo que el teorema de Weierstrass (§ 2, problema 7.º). Formular el teorema para este caso y demostrarlo.

4.° Resolver el problema 3.° del § 3 utilizando el teorema de Mittag-Leffler.

§ 6. Ejemplos de aplicación del teorema de Mittag-Leffler

Análogamente a lo que ocurre en el teorema de Weierstrass, los «sumandos generadores de la convergencia», $g_\lambda(z)$, no siempre son imprescindibles; cuando no existen, la función que se forma es, naturalmente, muy sencilla. Así, por ejemplo, si se quiere que los puntos, $0, 1, 4, \ldots, \lambda^2, \ldots$ sean polos de primer orden con las partes principales $\frac{1}{z-\lambda^2}$, la función

$$M_0(z) = \frac{1}{z} + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{z-\lambda^2} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{1}{z-\lambda^2}$$

es una solución. Pues si se toma arbitrariamente $R > 0$ y $m > \sqrt{2R}$, la serie contada a partir de $\lambda = m + 1$ es uniformemente convergente (1) en $|z| \leq R$.

Vamos ahora a formar las funciones meromorfas correspondientes a los ejemplos del § 3.

Ejemplo 1.°: cot πz. Tomamos los puntos reticulares reales, como polos de primer orden con residuo $+1$, por consiguiente, con las partes principales

$$h_\lambda(z) = \frac{1}{z - z_\lambda}, \quad (z_0 = 0, \quad z_{2\nu-1} = \nu, \quad z_{2\nu} = -\nu).$$

Aquí, para $\lambda = 1, 2, 3, \ldots$ es

$$h_\lambda(z) = -\frac{1}{z_\lambda} - \frac{z}{z_\lambda^2} - \frac{z^2}{z_\lambda^3} - \ldots$$

y entonces basta tomar todos los $n_\lambda = 0$, y, por tanto,

$$g_\lambda(z) = -\frac{1}{z_\lambda},$$

(1) Pues, para $\lambda > m$, es, en este círculo,

$$\left|\frac{1}{z-\lambda^2}\right| \leq \frac{1}{\lambda^2 - R} < \frac{1}{\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2}.$$

puesto que, en tal caso, para todos los valores suficientemente grandes de λ (a saber, para todos los $\lambda > 4R$) y todos los $|z| \leq R$ es

$$|h_\lambda(z) - g_\lambda(z)| \leq \frac{R}{|z_\lambda|(|z_\lambda| - R)} < \frac{2R}{|z_\lambda|^2},$$

luego menor que el término correspondiente en una serie de términos positivos evidentemente convergente.

Según la observación hecha al final del artículo anterior, la función más general de las condiciones dadas será, representando por $G(z)$ una función entera arbitraria, la

$$M(z) = G(z) + \frac{1}{z} + \sum_{\lambda=1}^{\infty}\left[\frac{1}{z-z_\lambda} + \frac{1}{z_\lambda}\right]$$

$$= G(z) + \frac{1}{z} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\left[\frac{1}{z-\nu} + \frac{1}{\nu}\right] + \left[\frac{1}{z+\nu} - \frac{1}{\nu}\right]\right)$$

$$= G(z) + \frac{1}{z} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{1}{z-\nu} + \frac{1}{z+\nu}\right]$$

También la función cot z tiene polos de primer orden en los puntos $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ (I, pág. 145, 3.°). Si n es uno de ellos, su residuo es

$$= \lim_{z \to n} \frac{(z-n)\cos \pi z}{\operatorname{sen} \pi z} = \lim_{z \to n} \frac{(z-n)\,[(-1)^n + \ldots]}{(-1)^n \pi (z-n) + \ldots} = \frac{1}{\pi},$$

como se deduce inmediatamente del desarrollo en serie dado para el entorno del punto $z = n$. Por consiguiente, la función $\pi \cot \pi z$ debe ser caso particular de la $M(z)$ que ahora acabamos de construir.

Hemos llegado así, partiendo de un punto completamente distinto, a la fórmula (2) del § 3. La función entera, aun indeterminada, $G(z)$, que allí llamábamos $h'_0(z)$, tampoco puede ser aquí determinada por el solo conocimiento de la posición y naturaleza de los polos, sino que, como allí, la determinación exige acudir a propiedades particulares de la función que nos ocupa. Sin embargo, al tratar de la determinación factorial de sen πz, ya habíamos encontrado que hay que poner $h_0'(z)$ o, lo que es lo mismo, $G(z) = 0$ y, por consiguiente, que

$$\pi \operatorname{ctg} \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\frac{1}{z-\nu} + \frac{1}{z+\nu} \right]$$

es la *descomposición en fracciones simples de la función cot.*

Ejemplo 2.º: La función $\wp$ de Weierstrass. Completando el ejemplo 2.º del § 3, debemos construir ahora una función meromorfa que tenga en cada uno de los puntos reticulares $z_\lambda = k\omega + k'\omega'$ allí indicados y numerados, un polo de *segundo* orden con la parte principal

$$h_\lambda(z) = \frac{1}{(z-z_\lambda)^2}, \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots).$$

Para $\lambda = 1, 2, 3, \ldots$ es entonces

$$h_\lambda(z) = \frac{1}{z_\lambda^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{z}{z_\lambda}\right)^2} = \frac{1}{z_\lambda^2} + 2\frac{z}{z_\lambda^3} + 3\frac{z^2}{z_\lambda^4} + \ldots,$$

y, como antes, basta tomar todos los $n_\lambda = 0$; luego como $g_\lambda(z)$ el primer término de este desarrollo, puesto que entonces es

$$h_\lambda(z) - g_\lambda(z) = \frac{1}{(z-z_\lambda)^2} - \frac{1}{z_\lambda^2} = \frac{2zz_\lambda - z^2}{z_\lambda^2(z-z_\lambda)^2};$$

y, por consiguiente, para cualquier $R > 0$, para todos los $|z| \leq R$ y todos los valores suficientemente grandes de λ (para los que hacen $|z_\lambda| > 2R$) es

$$|h_\lambda(z) - g_\lambda(z)| \leq \frac{R(2|z_\lambda| + R)}{|z_\lambda|^2(|z_\lambda| - R)^2} < \frac{3R|z_\lambda|}{|z_\lambda|^2(\frac{1}{2}|z_\lambda|)^2} = \frac{12R}{|z_\lambda|^3}.$$

Pero esta última fracción es el término general de una serie convergente de términos positivos (§ 3, pág. 189); por tanto,

$$M_0(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(z-z_\lambda)^2} - \frac{1}{z_\lambda^2} \right]$$

es una función meromorfa de las condiciones pedidas, de la cual se deduce inmediatamente la más general.

En la teoría de Weierstrass de las funciones elípticas, se designa esta función con el nombre **de función pe** relativa al par de períodos (ω, ω') y se la representa por la notación

$$\wp(z) = \wp(z|\tfrac{1}{2}\omega, \tfrac{1}{2}\omega')$$

La convergencia absoluta de la serie que representa esta función hace que no haya que tener en cuenta el orden de sus términos, de modo que también aquí, como ocurría en la función sigma (pág. 190), se puede escribir, prescindiendo de la ordenación de los puntos reticulares:

$$\wp(z|\tfrac{1}{2}\omega, \tfrac{1}{2}\omega') = \frac{1}{z^2} + \sum_{k,k'}{}' \left[\frac{1}{(z-k\omega-k'\omega')^2} - \frac{1}{(k\omega+k'\omega')^2} \right],$$

dando a k y k', independientemente uno de otro, todos los valores enteros $\gtreqless 0$, con la única restricción de que no se anulen al mismo tiempo. Esta circunstancia se denota aquí, según el convenio establecido, por el acento puesto al símbolo de suma.

La función $\wp(z)$ y la función σ del § 3 guardan entre sí una relación análoga a la que existe entre cot y sen. En efecto, según el teorema 8.º del § 2, es [1]

$$\frac{\sigma'}{\sigma}(z) = \frac{1}{z} + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \left[\frac{1}{z-z_\lambda} + \frac{1}{z_\lambda} + \frac{z}{z_\lambda^2} \right],$$

y según el teorema 9.º del mismo artículo,

$$-\frac{d}{dz}\left(\frac{\sigma'}{\sigma}(z)\right) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(z-z_\lambda)^2} - \frac{1}{z_\lambda^2} \right] = \wp(z);$$

por consiguiente,

$$\wp(z) = -\frac{d^2}{dz^2}(\log \sigma(z)) = \frac{(\sigma'(z))^2 - \sigma(z)\sigma''(z)}{\sigma^2(z)}.$$

La gran conexión existente entre los ejemplos 1.º y 2.º de éste y del tercer artículo, sugieren la idea de si existirá relación directa entre los dos

[1] El símbolo $\frac{\sigma'}{\sigma}(z)$ es una expresión abreviada del $\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}$. Esta función se suele llamar *función ζ de Weierstrass* y se representa por $\zeta(z)$. Naturalmente, no debe confundirse con la *función ζ de Riemann*, de que se trata en el ejemplo 4.º, con la cual nada tiene que ver. La función $\frac{\sigma'}{\sigma}(z)$ da al mismo tiempo un ejemplo de una función meromorfa que en cada uno de los puntos reticulares de la red paralelogramática tiene un polo de primer orden con el residuo $+1$.

teoremas fundamentales —el de Weierstrass y el de Mittag-Leffler—. Y así es, en efecto; puede deducirse el primero del último (pero no al contrario); el camino para hacerlo, dicho en pocas palabras, es el siguiente:

Cuando se trata de construir una función $G_0(z)$ con los ceros z_λ de orden α_λ, se construye primero, según el teorema de Mittag-Leffler, una función meromorfa $M_0(z)$ que en los puntos z_λ tenga polos de *primer* orden con los residuos α_λ, por consiguiente, con las partes principales $h_\lambda(z) = \dfrac{\alpha}{z - z_\lambda}$, y entonces es casi inmediato que $M_0(z)$ es la derivada logarítmica de una función entera $G_0(z)$ que se puede poner bajo la forma de un producto infinito y que satisface a las condiciones del teorema de Weierstrass.

Ejemplo 3.º: La función gamma. La función $\Gamma(z)$, de que se habló en el ejemplo 3.º relativo al teorema de Weierstrass, se ha visto que es el valor recíproco de la función entera $K(z)$ allí establecida. De aquí se deduce inmediatamente:

(1) $\Gamma(z)$ **es una función meromorfa** que sólo tiene polos en cada uno de los puntos $0, -1, -2, \ldots$; el orden de cada uno es el primero [en cuanto al residuo, véase más adelante, (7)]; además, es el valor recíproco de una función entera y, por consiguiente, no tiene ningún cero.

A continuación damos algunas otras propiedades de esta importante función:

(2) Para todo $z \neq 0, -1, -2, \ldots$ es

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

(Ecuación funcional de la función Γ)

Demostración:

$$\Gamma(z+1) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\,n^{z+1}}{(z+1)(z+2)\ldots(z+n+1)}$$

$$= z \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n!\,n^z}{z(z+1)\ldots(z+n)} \cdot \frac{n}{z+n+1} = z\Gamma(z).$$

(3) Para todo número entero $\lambda \geqq 0$ es

$$\Gamma(\lambda+1) = \lambda!,$$

es decir, $\Gamma(z)$ resuelve el problema de interpolación citado en la primera nota al pie de la página 191.

Demostración: Según (2), es

$$\Gamma(\lambda+1) = \lambda \cdot \Gamma(\lambda) = \lambda(\lambda-1)\Gamma(\lambda-1) = \ldots = \lambda!\,\Gamma(1);$$

y por la definición de Gauss de la función Γ se ve que es $\Gamma(1) = 1$.

(4) Para todo z es [1]

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Gamma(z+n+1)}{n!\,n^z} = 1$$

Demostración: La definición de Gauss indica que para $n \to \infty$ es

$$\frac{n!\,n^z}{(z+n)(z+n-1)\ldots(z+1)z\cdot\Gamma(z)} \to 1;$$

y aplicando reiteradamente $n+1$ veces la ecuación funcional, resulta que el denominador de esta expresión es $= \Gamma(z+n+1)$, lo que demuestra la propiedad.

(5) Para todo valor no entero de z es

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi z}.$$

Demostración: Según la definición de Gauss, el valor recíproco del primer miembro es

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{z(z+1)\ldots(z+n)}{n!\,n^z} \cdot \frac{(1-z)(2-z)\ldots(n+1-z)}{n!\,n^{1-z}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1-z}{n} \cdot z(1-z^2)\left(1-\frac{z^2}{2^2}\right)\ldots\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$$

$$= z \cdot \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{\nu^2}\right) = \frac{\operatorname{sen} \pi z}{\pi},$$

como se quería demostrar.

(6) $$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = +\sqrt{\pi}.$$ [2]

Demostración: Para $z = \frac{1}{2}$, la propiedad **(5)** da $[\Gamma(\frac{1}{2})]^2 = \pi$, de donde se deduce ésta, puesto que $\Gamma(\frac{1}{2})$, según la definición de Gauss, debe tomarse positiva.

---

[1] La ecuación funcional **(2)** junto con esta relación de límite **(4)**, son *características* de la función Γ, es decir, no hay ninguna función analítica, aparte $\Gamma(z)$, que satisfaga a las relaciones **(2)** y **(4)**.

[2] Esta propiedad puede expresarse también así:

$$\frac{n!\sqrt{n}}{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)\ldots(\frac{1}{2}+n)} \to \sqrt{\pi},$$

(7) El residuo en los polos $-\lambda$, $(\lambda = 0, 1, 2, \ldots)$, fijados en **(1)** es

$$a_{-1}^{(\lambda)} = \frac{(-1)^\lambda}{\lambda!}.$$

Demostración: Según la significación del residuo de un polo de primer orden, su valor en $z = -\lambda$ está dado por el límite

$$\lim_{z \to -\lambda} (z + \lambda)\Gamma(z).$$

Pero, según **(2)** es

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} = \ldots\ldots = \frac{\Gamma(z+\lambda+1)}{z(z+1)\ldots(z+\lambda)};$$

luego, cuando $z \to -\lambda$ será

$$(z+\lambda)\Gamma(z) \to \frac{\Gamma(1)}{(-\lambda)(-\lambda+1)\ldots(-2)(-1)} = \frac{(-1)^\lambda}{\lambda!},$$

como queríamos demostrar.

---

o también, como se ve operando una pequeña transformación:

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots (2n)} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}},$$

indicando con el símbolo «$\sim$» que el cociente de los dos miembros tiende al límite 1 cuando $n \to \infty$, y, por tanto, que, según la expresión habitual, son «asintóticamente iguales».

El primer miembro no es otra cosa que el coeficiente de z^n en la serie binómica

$$\frac{1}{\sqrt{1-z}} = 1 + \tfrac{1}{2}z + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}z^2 + \ldots \qquad + (-1)_n \binom{-\frac{1}{2}}{n} z^n + \ldots;$$

de modo que el contenido de la propiedad **(6)** equivale al de la expresión

$$(-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

Finalmente, éste puede también escribirse así:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{\ldots}\cdot\frac{2k}{2k-1}\cdot\frac{2k}{2k+1}\cdots,$$

en cuya forma, el resultado obtenido se ve que es el producto de *Wallis*, obtenido de la expresión factorial del seno (§ 3, problema 1 *a*) para $z = \frac{\pi}{2}$.

Ejemplo 4.º: La función ζ de Riemann. En la teoría analítica de los números desempeña un papel fundamental una función cuyas propiedades teórico-funcionales más importantes han sido establecidas por *Riemann*. Imaginemos, como en todo cuanto sigue, representada por t^z, para valores postivos de t, la función entera (uniforme) $e^{z \log t}$, en la que se atribuye a $\log t$ su valor real, en cuyo caso todos los términos de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

son funciones enteras (I, § 20, problema 2.º *a*). En todo el semiplano cerrado $R(z) \geqq 1 + \delta$ ($\delta > 0$ arbitrario) se conservan los valores absolutos de sus términos

$$\left|\frac{1}{n^z}\right| = \frac{1}{n^{R(z)}} \leqq \frac{1}{n^{1+\delta}};$$

luego, según el criterio de convergencia de Weierstrass, la serie es uniformemente convergente en dicho campo, y como $\delta > 0$ es completamente arbitrario, esto indica (I, § 22, teorema 3.º) que representa una función analítica en el semiplano $R(z) > 1$. Esta función ha recibido el nombre de *función ζ de Riemann*, y se la denota por $\zeta(z)$. De entre sus propiedades, demostraremos la siguiente:

Teorema: La función $\zeta(z)$ es prolongable por el borde $R(z) = 1$ del expresado semiplano, y es una función meromorfa con el único polo $z = 1$ al que corresponde la parte principal $\frac{1}{z-1}$; el polo es, pues, de primer orden con el residuo $+1$ (1).

La demostración comprende tres partes:

Primera parte. Prolongación hasta la recta $R(z) = 0$. Las funciones n^{-z} y $\frac{1}{n^{z-1}} - \frac{1}{(n+1)^{z-1}}$ para $n = 1, 2, \ldots$ son funciones enteras y como tienen un cero en $z = 1$, también las

$$\frac{1}{z-1}\left[\frac{1}{n^{z-1}} - \frac{1}{(n+1)^{z-1}}\right] = \int_0^1 \frac{dt}{(n+t)^z} = \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^z}$$

---

(1) En otros términos: Tanto $\zeta(z) - \frac{1}{z-1}$ como $(z-1)\,\zeta(z)$ son *funciones enteras* trascendentes).

Manuel Alberto del Castillo

son funciones enteras. Para $R(z) \geqq 1 + \delta$, el valor absoluto de la última integral (I, § 14) es $\leqq n^{-1-\delta}$. Por la misma razón de antes es convergente para $R(z) > 1$ la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{dt}{(n+t)^z} = \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^z} = \frac{1}{z-1};$$

restando ésta de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^z} = \zeta(z) - 1$$

y observando que

$$\frac{1}{(n+1)^z} - \int_0^1 \frac{dt}{(n+t)^z} = -z \int_0^1 \frac{t\,dt}{(n+t)^{z+1}}$$

(se comprueba esta igualdad, sin más que integrar por partes en la integral que figura en el segundo miembro), resulta:

$$\text{(a)} \qquad \zeta(z) = 1 + \frac{1}{z-1} - z \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{t\,dt}{(n+t)^{z+1}},$$

con lo cual se ha obtenido la prolongación deseada. Para ver que así es, en efecto, basta demostrar, atendida la forma de los dos primeros sumandos que figuran en el segundo miembro, que el tercer sumando, o, simplemente, que la nueva serie del segundo miembro representa una función analítica para $R(z) > 0$. Pero esto resulta de consideraciones enteramente iguales a las antes empleadas: los términos de la serie son funciones enteras (han sido obtenidos por sustracción de otras de esta especie) y sus valores absolutos para $R(z) \geqq \delta$ son $\leqq n^{-1-\delta}$, de donde se sigue como antes todo lo demás. Con esto la expresión (a) pone de manifiesto el carácter que tratábamos de demostrar del punto $+1$, y además, amplía el campo de existencia de $\zeta(z)$ en una faja del ancho 1 hacia la izquierda.

De modo análogo se podrá ir ampliando sucesivamente en fajas de estas condiciones el campo de existencia de la función, con lo cual se tendrá demostrado completamente el teorema.

Segunda parte. Prolongación hasta la recta $R(z) = -1$. Integrando nuevamente por partes, se obtiene

$$-z \int_0^1 \frac{t\,dt}{(n+t)^{z+1}} = -\frac{z}{2(n+1)^{z+1}} - \frac{z(z+1)}{2} \int_0^1 \frac{t^2 dt}{(n+t)^{z+2}}$$

y, por consiguiente,

$$\text{(b)} \qquad \zeta(z) = 1 + \frac{1}{z-1} - \frac{z}{2}[\zeta(z+1) - 1] - \frac{z(z+1)}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{t^2 dt}{(n+t)^{z+2}}.$$

La función entre paréntesis que figura en el tercer sumando del segundo miembro, según lo dicho en la primera parte, es analítica en $R(z) > -1$, excepto en $z = 0$, donde tiene un polo de primer orden; luego su producto por el factor z hace que este segundo sumando sea función analítica en $R(z) > -1$, sin excepción. Lo mismo se puede decir del cuarto sumando, pues los términos de la nueva serie son también funciones enteras, que ahora, para $R(z) > -1 + \delta$ conservan su valor absoluto $\leqq n^{-1-\delta}$, de donde se sigue el resto de la demostración.

Tercera parte. Prolongación hasta la recta $R(z) = -2$. Una nueva integración por partes da

$$\int_0^1 \frac{t^2 dt}{(n+t)^{z+2}} = \frac{1}{3(n+1)^{z+2}} + \frac{z+2}{3} \int_0^1 \frac{t^3 dt}{(n+t)^{z+3}},$$

y, por consiguiente,

$$\text{(c)} \qquad \zeta(z) = 1 + \frac{1}{z-1} - \frac{z}{2!}[\zeta(z+1) - 1]$$

$$- \frac{z(z+1)}{3!}[\zeta(z+2) - 1] - \frac{z(z+1)(z+2)}{3!} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{t^3 dt}{(n+t)^{z+3}};$$

y consideraciones análogas a las empleadas antes muestran que $\zeta(z)$ tampoco tiene en el semiplano $R(z) > -2$ otras singularidades que el polo de primer orden en el punto $+1$, con la parte principal $\frac{1}{1-z}$.

Con esto queda ya bien claro cómo una vez demostrada la regularidad de $\zeta(z) - \frac{1}{1-z}$ en el semiplano $R(z) > -(k+1)$, se demuestra para el

$R(z) > -k$, y, por consiguiente, en virtud del principio de inducción, queda demostrado el teorema [1].

Problemas: 1.º Descomponer en fracciones simples, según el teorema de Mittag-Leffler, las siguientes funciones meromorfas:

$$\text{a)}\ \operatorname{tg} z; \qquad \text{b)}\ \frac{1}{\operatorname{sen} z}; \qquad \text{c)}\ \frac{\pi}{\cos\frac{\pi}{2} z};$$

$$\text{d)}\ \frac{1}{e^z - 1}; \qquad \text{e)}\ \frac{1}{e^z + 1}; \qquad \text{f)}\ \frac{1}{\cos z - \operatorname{sen} z}.$$

2.º La sucesión de funciones

$$f_n(z) = \frac{n!\, n^z}{z(z+1)\ldots(z+n)}$$

es *uniformemente* convergente en todo recinto cerrado acotado que no contenga ninguno de los puntos $0, -1, -2, \ldots$

3.º Determinar, cuando z_1 y z_2 son dos puntos diferentes de $0, -1, -2, \ldots$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{z_1(z_1+1)\ldots(z_1+n)}{z_2(z_2+1)\ldots(z_2+n)}.$$

4.º La función entera $K(z)$ definida en el texto admite la siguiente representación, bajo forma de integral:

$$K(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i} \overset{(L)}{\int} e^t t^{-z}\, dt,$$

siendo L una trayectoria que comienza en el infinito, por la izquierda, va por debajo del eje real negativo hasta las proximidades del origen, rodea a éste en sentido positivo y vuelve al infinito por encima del eje real negativo. (Téngase en cuenta la multiformidad de t^{-z}, cuando se fija z como función de t. En la segunda parte de este tomo pueden verse más pormenores acerca de esta materia.)

---

[1] La *trascendencia* de la función entera $\zeta(z) - \frac{1}{z-1}$ puede verse del siguiente modo: La consideración de la serie que define $\zeta(z)$ demuestra que $\lim_{z \to +\infty} \zeta(z) = 1$; por consiguiente, si la diferencia en cuestión fuese una función entera *racional*, sería idénticamente $= 1$; luego $\zeta(z) = 1 + \frac{1}{z-1}$, cuya falsedad se advierte ya para $z = 2$. Un estudio circunstanciado de la función ζ de Riemann, incluso de todas sus aplicaciones a la teoría de números, puede verse en la obra en dos tomos de *E. Landau*, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, Leipzig, 1909.

5.º Realizar, con todos sus pormenores, la demostración del teorema de Weierstrass, deduciéndolo del de Mittag-Leffler, como se ha indicado en el texto.

6.º Demostrar que, como se indicó en la nota al pie de la página 205, a función Γ está caracterizada, sin ambigüedad, por las dos propiedades **(2)** y **(4)** (págs. 204 y 205).

7.º Como complemento del problema 4.º a), del § 2, demostrar que la función ζ de Riemann no tiene ningún cero en el semiplano $R(z) > 1$.

CAPÍTULO III

FUNCIONES PERIÓDICAS

§ 7. Períodos de las funciones analíticas

Definición: Se dice que una función analítica es *periódica* cuando existe un número, Ω, diferente de 0, tal que a cada punto, z, de su campo de regularidad corresponda otro, $z + \Omega$, del mismo y sea

$$f(z + \Omega) = f(z). \tag{1}$$

Cada número Ω de estas condiciones se llama *período* de $f(z)$.

Entre las funciones elementales, son periódicas e^z y las trigonométricas. Por ejemplo, tg z tiene el período -7π; pero también 13π y 2π son períodos de tg z.

Para concretarnos a lo más importante, supondremos en cuanto sigue que $f(z)$ es uniforme y analítica en todo el plano, exceptuados los puntos singulares aislados (se considerarán, pues, en particular, las funciones enteras y las meromorfas); además, supondremos que $f(z)$ no se reduce a una constante, pues de otro modo la ecuación (1) sería trivial.

Poniendo $z + \Omega$ en lugar de z en (1), se ve que siendo Ω período, también lo es 2Ω; más general, se ve fácilmente la exactitud del

Teorema 1.°: La suma y la diferencia de dos períodos de una función son también períodos de la misma [1]; siéndolo Ω lo son todos los números $n\Omega$ y siéndolo Ω y Ω' lo son todos los $n\Omega + n'\Omega'$ si n y n' denotan números enteros cualesquiera.

Imaginemos ahora marcados en el plano todos los puntos correspondientes a los períodos de una función (los llamados «puntos periódicos»): entonces se verifica, en primer término, el importante

Teorema 2.°: El conjunto de todos los puntos periódicos de una función uniforme no tiene ningún punto de acumulación a distancia finita.

Demostración: Supongamos que hubiera uno de estos puntos de acumulación; en sus proximidades habría infinitos puntos periódicos, por tanto, en particular, puntos cuyas distancias mutuas fuesen tan pequeñas como se quiera, y, según el teorema 1.°, habría períodos de valor absoluto tan pequeño como se quisiese y se podría formar una sucesión de períodos $\Omega_1, \Omega_2, \ldots$ tal que fuese $\Omega_n \to 0$. Pero entonces, si z es un punto regular cualquiera de $f(z)$ y $f(z) = a$, para todo $n = 1, 2, 3, \ldots$ sería

$$f(z_0 + \Omega_n) = f(z_0) = a,$$

lo cual querría decir que en todo entorno de z_0 habría puntos a de la función, lo que, según vimos (I, § 24, teorema 1.°), es imposible, a menos de ser $f(z)$ constante.

Este teorema puede también enunciarse así:

Teorema 3.°: Una función uniforme no puede tener períodos tan pequeños como se quiera.

De estos teoremas, que dan una primera orientación, podemos deducir algunas importantes consecuencias:

[1] Si $f(z)$ es periódica, entre sus períodos se cuenta el 0, cosa que debe tenerse en cuenta en este teorema y en cuanto sigue.

Sea $f(z)$ una función con el período Ω; los números $n\Omega$ que, según el teorema 1.°, también son períodos, están sobre la recta L que contiene los puntos 0 y Ω y forman un conjunto de puntos equidistantes entre sí (fig. 10). Si sobre L hubiera otro punto periódico (por ejemplo, tg z, junto con el período -7π tiene, además de los períodos $7\pi n$, también el 3π), necesariamente tendría la forma

$$n\Omega + \vartheta\Omega, \qquad (n \text{ entero}, 0 < \vartheta < 1),$$

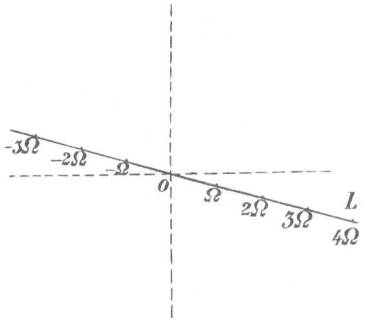

Fig. 10

lo cual demostraría, según el teorema 1.°, la existencia de un período $\vartheta\Omega$; es decir, si además de los períodos $n\Omega$ hay otros en la recta L, entre 0 y Ω hay alguno; pero en este segmento sólo puede haber un número finito; luego hay uno más próximo que los demás al origen; lo designaremos por ω [1], y entonces podemos enunciar el

Teorema 4.°: Todo período dado en L tiene la forma

$$n\omega, (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Demostración: Según el teorema 1.°, todos los números $n\omega$ son períodos; si, aparte éstos, hubiera otro en L, tendría la

[1] Si entre 0 y Ω no hay ningún otro período, pondremos $\omega = \Omega$.

forma $n\omega + \vartheta\omega$, $(0 < \vartheta < 1)$; pero entonces también sería período $\vartheta\omega$, es decir, un punto situado entre 0 y ω sobre L, contra la hipótesis de ser ω el punto periódico, más próximo al origen, de L. Según esto, ω queda completamente determinado sobre L, salvo el signo (que es indiferente), por Ω, y se le llama **período primitivo** de $f(z)$.

Por ejemplo, tg z tiene el período $\Omega = -7\pi$; en este caso, L es el eje real. Entre 0 y -7π hay todavía otros 6 períodos de tg z, a saber:

$$-\pi, -2\pi, \ldots, -6\pi;$$

entre los cuales $-\pi$ es el más próximo a 0; por consiguiente, $-\pi$ es un *período primitivo* de tg z, de modo que todos los períodos situados sobre L (luego, en este caso, todos los *reales*) son de la forma $-n\pi$.

Si fuera de los períodos $n\omega$ así determinados no tiene la función ningún otro, se dice que la función es **simplemente periódica:** en caso contrario, todos los períodos no están sobre una recta, sino que forman un conjunto plano, del cual puede formarse idea del siguiente modo:

Como, en virtud del teorema 2.°, en cada círculo sólo puede haber un número finito de puntos periódicos, necesariamente habrá una circunferencia mínima de centro 0 sobre la cual haya uno o más (distintos de 0) puntos periódicos (fig. 3). Designemos uno de éstos por ω; necesariamente es un período primitivo de la función, y en la recta L que une 0 con ω hay los períodos $n\omega$ y ningún otro; de momento, prescindamos de ellos. Consideremos ahora, como antes, la circunferencia mínima que contenga uno o varios de los períodos restantes: entre ellos (seguramente en número finito) designemos por ω' el primero que se encuentra cuando la semirrecta de origen 0 que pasa por ω gira en sentido positivo alrededor de 0. Entonces la distribución de los puntos periódicos en todo el plano se verifica con arreglo al

Teorema 5.°: Todos los puntos periódicos de la función están contenidos en la forma

$$n\omega + n'\omega', \qquad \begin{cases} n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \\ n' = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{cases}$$

Demostración: Si aparte éstos, que, según el teorema 1.°, son períodos, hubiese algún otro, sería de la forma

$$(n + \vartheta)\omega + (n' + \vartheta')\omega', \qquad 0 \leq \vartheta \leq 1, \quad 0 \leq \vartheta' \leq 1,$$

en la que ϑ y ϑ' no fuesen enteros (es decir, 0 ó 1) simultáneamente; pero entonces también

$$\Omega = \vartheta\omega + \vartheta'\omega'$$

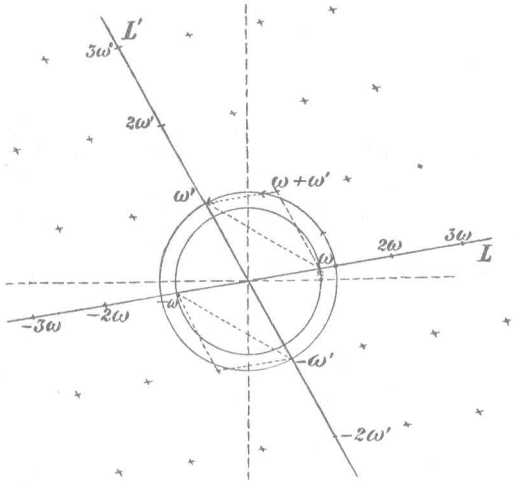

Fig. 11

sería un período, y este punto tendría que estar dentro del paralelogramo de vértices 0, ω, $\omega + \omega'$, ω', sin confundirse con ninguno de ellos. Ahora bien, según el procedimiento de determinación de ω y ω', dentro del triángulo de vértices 0, ω, ω' no puede haber ningún punto periódico; luego tendrá que estar en la otra mitad de dicho paralelogramo, pero siendo Ω período, también lo sería

$$\Omega' = -\Omega + \omega + \omega',$$

y éste tendría que estar en el triángulo 0, ω, ω', en el que, sin embargo, no puede haber período alguno, según hemos visto. Por consiguiente, la hipótesis hecha de que fuera de los puntos $n\omega + n'\omega'$ hubiera otros períodos, es inadmisible.

De aquí se sigue que una función periódica que no es simplemente periódica tiene sus períodos en la posición indicada por el teorema 5.° Tales funciones reciben el nombre de **doblemente periódicas,** y tenemos el

Teorema 6.°: La periodicidad de una función analítica *uniforme* sólo puede ser *simple* o *doble*; no cabe una tercera especie de estas funciones [1].

El par de números ω y ω' recibe el nombre de **par de períodos primitivos** de la función; su razón, por tratarse de puntos no alineados con el origen, necesariamente es compleja:

$$R\left(\frac{\omega'}{i\omega}\right) \gtrless 0 \quad [2].$$

Mientras que en una función simplemente periódica un período primitivo quedaba completamente determinado, aparte el signo (absolutamente indiferente), en una función doblemente periódica se puede dar un par de períodos primitivos de muy diversas maneras (de infinitas). (Véanse las figuras 9 y 11, en las cuales el conjunto de *estos* puntos se ha obtenido en la forma $n\omega + n'\omega'$ con diferentes significaciones de ω y ω'.)

Problemas: 1.° Una función racional (no constante) no puede ser periódica.

2.° Una función analítica uniforme (no constante) no puede tener los períodos 1 y $\sqrt{2}$.

---

[1] Se dice que k números complejos $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_k$ son linealmente independientes cuando no hay ningún sistema de k números enteros reales, que no se anulen simultáneamente, $n_1, n_2, \ldots n_k$ tales que sea $n_1\omega_1 + n_2\omega_2 + \ldots + n_k\omega_k = 0$; con esta denominación, este teorema puede ser enunciado así: *Una función uniforme no puede tener más de dos períodos linealmente independientes.*

[2] En nuestra determinación del par de períodos primitivos, la parte imaginaria de la «razón de períodos», ω': ω, es seguramente *positiva*, porque el sentido positivo que lleva a coincidir la semirrecta 0 ω con la 0 ω' es $< \pi$.

3.° Para completar las consideraciones de la pág. 215 sobre determinación de ω y ω', demostrar que sobre la circunferencia de centro 0 en que está el punto ω puede haber, a lo más, 2, 4 ó 6 períodos, que, respectivamente, están situados en el mismo diámetro que ω, en los vértices de un rectángulo o en los de un hexágono regular

4.° Si en la circunferencia a que se refiere el problema 3.° hay dos períodos (por consiguiente, ω y $-\omega$), la elección hecha en e texto, de ω y ω' da para *razón de períodos* un número $\tau = \dfrac{\omega}{\omega'}$ que satisface a las condiciones

$$|\tau| \geqq 1, \qquad -\tfrac{1}{2} < R(\tau) \leqq \tfrac{1}{2}.$$

Demostrar que estas relaciones subsisten cuando hay 4 ó 6 períodos en la circunferencia, siempre que se designe por ω uno convenientemente elegido de ellos.

§ 8. Funciones simplemente periódicas

La periodicidad de una función simplemente periódica puede hacerse intuitiva del siguiente modo: Por un punto cualquiera, c, de L, por ejemplo, por el origen, se traza una recta cualquiera, L', diferente de la L (fig. 12), y por todos los puntos $c + n\omega$ paralelas a L'. Así, queda dividido el plano en fajas que se llaman **fajas periódicas**; y la ecuación

$$f(z + n\omega) = f(z)$$

significa sencillamente que la función $f(z)$, para puntos *congruentes*, es decir, que tienen posiciones congruentes [1] en dos fajas, tiene los mismos valores (en la fig. 12 se han marcado los puntos congruentes con el z_0). Una función periódica agota, pues, todo el conjunto de sus valores en una de las fajas, aunque — como haremos siempre — sólo se considere como perteneciente a la faja uno de sus bordes; en cualquiera otra faja se repiten nuevamente todos los

[1] Se dice, pues, que dos puntos z_0 y z_1 son *congruentes* cuando su diferencia $z_1 - z_0$ es un período $n\omega$.

valores, por consiguiente, todas las propiedades regulares y singulares de la función; lo que se diga de un punto z, se dice de todos los congruentes con él.

La función e^z tiene el período primitivo $2\pi i$; en este caso, e leje imaginario es la recta L y, por tanto, se puede tomar como recta L' el eje real. Una faja periódica sería entonces, por ejemplo, el recinto $0 \leqq J(z) < 2\pi$.

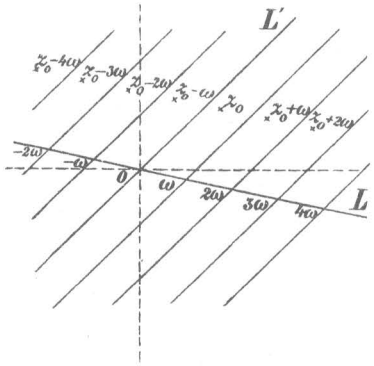

Fig. 12

La función sen z tiene el período prinitivo $\omega = 2\pi$; como fajas periódicas se pueden tomar, pues, los recintos $\gamma \leqq R(z) < \gamma + 2\pi$, donde se designa por γ cualquier número real.

Basta, por consiguiente, estudiar una función simplemente periódica en una de sus fajas periódicas para conocerla completamente. Conviene observar que se puede admitir siempre que es $\omega = 1$, lo cual no supone restricción alguna, pues poniendo $z = \omega z'$ se transforma $f(z) = f(\omega z')$ en una función que, considerada como función de z', evidentemente tiene el período $+1$ [1]. Entonces los *números enteros*

[1] Por esto hemos escrito frecuentemente, en lo que precede, $e^{2\pi i z}$, sen $2\pi z$, cot πz, etc., pues así las funciones consideradas tenían el período $+1$, y con ello se facilitaba la exposición.

reales son los períodos de la función, L es el eje real y se puede tomar como L' el eje imaginario, con lo cual se facilita mucho la representación del plano dividido en fajas periódicas.

La naturaleza de la función se pone claramente de manifiesto por medio del siguiente artificio: En lugar de z, se introduce una nueva variable ζ, poniendo

$$\text{(a)} \qquad z = \frac{1}{2\pi i} \log \zeta, \qquad \zeta = e^{2\pi i z},$$

y se considera la función $\varphi(\zeta)$ definida así:

$$f(z) = f\left(\frac{1}{2\pi i} \log \zeta\right) = \varphi(\zeta).$$

Entonces, por ser

$$f(z) = \varphi(\zeta) = \varphi(e^{2\pi i z}),$$

la función periódica propuesta *puede ser considerada o representada como función de* $e^{2\pi i z}$, en lugar de serlo de z.

Como $\log \zeta$ (I, § 28, 1.°) es una función infinitiforme, parece como si la función que tratamos, $\varphi(\zeta)$, fuese una función multiforme, lo cual dificultaría el estudio; pero como todos los valores de $\log \zeta$ se obtienen de uno particular por adición de todos los múltiplos de $2\pi i$, todos los valores de $\frac{1}{2\pi i} \log \zeta$ se diferencian entre sí por la adición de números enteros (reales) cualesquiera, es decir, en períodos de $f(z)$. Las diferentes determinaciones de log dan, pues, valores *congruentes* de z, y se ve que $\varphi(\zeta)$ es una función uniforme. La multiformidad del log está compensada por la periodicidad de $f(z)$.

Ahora bien, ¿cuál es el campo de existencia de $\varphi(\zeta)$ y de qué naturaleza son sus puntos singulares? Como $\log \zeta$ es singular

en 0 y en ∞ (pero en ningún otro punto), estos dos puntos podrán ser, desde luego, puntos singulares de $\varphi(\zeta)$, pero ningún otro puede serlo porque lo sea el log. Fuera de éstos, la función $\varphi(\zeta)$ sólo podrá ser singular en los puntos ζ que, por la relación (a), correspondan a singularidades de $f(z)$. Pero en este caso hay una notable simplificación, pues si z_0 es un punto singular de $f(z)$, también lo son todos los puntos de la forma $z_0 + k$, cualquiera que sea el número entero $k \gtrless 0$. A todo este conjunto de puntos singulares de $f(z)$ corresponde ahora el único punto

$$\zeta_0 = e^{2\pi i z_0} = e^{2\pi i (z_0 + k)}$$

singular de la función $\varphi(\zeta)$. Esta absorbe, pues, por decirlo así, sólo las singularidades *de una* faja de $f(z)$.

Resumiendo todos estos resultados, se puede enunciar el

Teorema 1.°: Cada una de las funciones simplemente periódicas $f(z)$ de período 1 por nosotros consideradas, puede ser considerada o representada como función uniforme, $\varphi(\zeta)$, de $\zeta = e^{2\pi i z}$. Esta nueva función es, en general, de naturaleza más sencilla que la $f(z)$, pues a *cada conjunto* de singularidades congruentes de $f(z)$ corresponde, según (a), *una sola* singularidad de $\varphi(\zeta)$. Prescindiendo de éstas y de las únicas otras posibles 0 y 1, la función $\varphi(\zeta)$ es analítica [1].

Ejemplos: 1.° Para la función *seno* es sabido que es

$$\operatorname{sen} 2\pi z = \frac{1}{2i}(e^{2\pi i z} - e^{-2\pi i z}) = \frac{1}{2i}\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right).$$

En este caso, $\varphi(\zeta)$ es, pues, una función racional muy sencilla.

2.° Análogamente, a la función $\cos 2\pi z$ corresponde la función racional $\varphi(\zeta) = \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)$.

[1] Esto es aplicable a toda función periódica; por consiguiente, también a las *doblemente* periódicas, con que nos ocuparemos en el artículo siguiente.

3.º Del mismo modo se tiene:

$$\operatorname{tg} \pi z = -i\frac{\zeta - 1}{\zeta + 1}, \qquad \cot \pi z = +i\frac{\zeta + 1}{\zeta - 1}.$$

(Como debía ser, a los polos de primer orden $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ de la función $\cot \pi z$, corresponde el único polo $\zeta = e^0 = +1$).

Después de lo dicho, es fácil dar un desarrollo válido para todas nuestras funciones $f(z)$. Puesto que $f(z)$ es analítica en todo el plano, salvo en puntos singulares aislados, podremos recortar de diversos modos, de la faja periódica, por medio de paralelas al eje real, un rectángulo, en cuyo interior y en sus lados verticales sea analítica $f(z)$. Si y_1 e y_2 $(> y_1)$ son las ordenadas de dichas paralelas, la función $f(z)$ es analítica en toda la faja (P) caracterizada por $y_1 < \mathcal{J}(z) < y_2$. Por consiguiente, $\varphi(\zeta)$ es analítica siempre que z satisfaga en $\zeta = e^{2\pi i z}$ a las condiciones indicadas, es decir, siempre que sea

$$e^{-2\pi y_2} = r_2 < |\zeta| < r_1 = e^{-2\pi y_1} \quad (^1).$$

La función $\varphi(\zeta)$ es, pues, uniforme y analítica en un anillo circular determinado por el rectángulo recortado y puede, por tanto, ser desarrollada en esta corona en una serie de Laurent

$$\varphi(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \zeta^n, \qquad (r_2 < |\zeta| < r_1),$$

que será convergente en la corona más ancha que se obtenga por contracción del círculo interior y extensión del exterior y que no contenga ningún punto singular (I, § 32, página 140). Poniendo en vez de ζ su valor, resulta el

Teorema 2.º: Si $f(z)$ es una función uniforme con el período primitivo 1, a cada faja (P), paralela al eje real, que

(1) $|e^{2\pi i z}| = |e^{2\pi i(x + iy)}| = e^{-2\pi y}$.

no contenga ningún punto singular, corresponde un desarrollo, y sólo uno, de la forma

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{2n\pi i z},$$

el cual converge en la faja más ancha, sin puntos singulares, que se deduzca de la (P) por traslación de sus bordes hacia arriba y hacia abajo. Fuera de esa faja, la serie es divergente.

Si la faja así obtenida contiene en su interior el eje real —lo que siempre puede conseguirse si el eje real no contiene ningún punto singular— partiendo de este desarrollo se obtiene uno de Fourier de funciones analíticas reales, poniendo $e^{2\pi i z} = \cos 2\pi z + i \operatorname{sen} 2\pi z$. Sin embargo, no podemos detenernos aquí en ello.

También hemos de conformarnos con la indicación de que, naturalmente, de cualquiera otra forma de desarrollo de la función uniforme $\varphi(\zeta)$ – serie de potencias ordinaria, representación factorial, descomposición en fracciones simples — puede deducirse otra representación de $f(z)$ como función de $e^{2\pi i z}$.

Hasta ahora sólo hemos encontrado en las funciones periódicas las elementales; en los próximos artículos veremos otras. Para algunas de ellas ya hemos deducido la forma de la función $\varphi(\zeta)$ correspondiente (págs. 221 y 222), y visto que es extremadamente sencilla, *racional* (1). De aquí se sigue que las funciones simplemente periódicas más sencillas, pero también más importantes, son aquellas para las cuales la función correspondiente $\varphi(\zeta)$ es racional. La clase de estas funciones — por consiguiente, *la clase de las funciones racionales de* $e^{2\pi i z}$ — tiene propiedades particularmente bellas y típicas. Vamos a deducir ahora algunas de ellas:

Teorema 3.º: A toda función $f(z)$ de esta clase corresponde un *teorema de adición algebraica*; es decir, $f(z_1 + z_2)$,

(1) A la función exponencial misma corresponde, naturalmente, la *función* ζ.

para valores variables de z_1 y z_2, puede expresarse algebraicamente por medio de $f(z_1)$ y $f(z_2)$.

Así, por ejemplo, para la función *seno*, cuando hacemos que el período primitivo sea $+1$, se verifica el teorema de adición

$$\operatorname{sen} 2\pi(z_1+z_2) = \operatorname{sen} 2\pi z_1 \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 2\pi z_2} + \operatorname{sen} 2\pi z_2 \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 2\pi z_1}.$$

Demostración: Por hipótesis, es $f(z) = R(\zeta)$, representando por R una función *racional* de su variable. Por consiguiente, si ponemos $e^{2\pi i z_1} = \zeta_1$, $e^{2\pi i z_2} = \zeta_2$ y, por tanto, $e^{2\pi i(z_1+z_2)} = \zeta_1\zeta_2$, será:

$$f(z_1) = R(\zeta_1), \quad f(z_2) = R(\zeta_2), \quad f(z_1+z_2) = R(\zeta_1\zeta_2);$$

y como entre estas tres ecuaciones, racionales en ζ_1 y ζ_2, pueden eliminarse algebraicamente estas dos magnitudes, resulta inmediatamente el llamado teorema de adición algebraica.

Teorema 4.°: Entre cada dos funciones $f_1(z)$ y $f_2(z)$ de la clase ahora estudiada existe una relación *algebraica*.

Demostración: De la hipótesis

$$f_1(z) = R_1(\zeta) \quad \text{y} \quad f_2(z) = R_2(\zeta)$$

se deduce la propiedad enunciada sin más que eliminar ζ.

Si $f(z) = \varphi(\zeta)$ es una función de la clase que vamos estudiando, también lo es la $f'(z)$, por ser $= 2\pi i \zeta \varphi'(\zeta)$. Aplicándole el teorema anterior, resulta este

Teorema 5.°: Toda función $w = f(z)$ de nuestra clase satisface a una ecuación diferencial de la forma sencilla [1]

$$w' = \frac{dw}{dz} = A(w),$$

en la que $A(w)$ representa una función algebraica.

[1] Es una ecuación de primer orden que no contiene la variable independiente.

Como de aquí se deduce — con ciertas restricciones para la variabilidad de w —

$$dz = \frac{dw}{A(w)}, \qquad z = \int_{w_0}^{w} \frac{dw}{A(w)} = F(w),$$

se puede, por último, decir:

Teorema 6.°: Toda función de esta clase, $w = f(z)$, es la *inversa* de la integral $z = F(w)$ de una función algebraica [1].

Problemas: 1.° ¿Existen funciones simplemente periódicas (uniformes) que en una faja periódica tengan ceros dados (con órdenes también dados)? ¿Cómo podrían ponerse en forma explícita?

2.° ¿Existen funciones simplemente periódicas (uniformes) que en una faja periódica tengan puntos singulares aislados dados? ¿Cómo se los puede poner explícitamente de manifiesto, cuando se dan sus partes principales?

3.° ¿En qué recinto del plano w viene representado por medio de la función $w = e^{\frac{2\pi i}{\omega} z}$ el paralelogramo fundamental de una red de paralelogramos del plano z, determinada por (ω, ω')?

§ 9. Funciones doblemente periódicas. Funciones elípticas

También se puede estudiar intuitivamente de modo fácil una función doblemente periódica, de modo análogo al caso anterior. Tracemos por todos los puntos $n'\omega'$ paralelas a L y por todos los $n\omega$ paralelas a L'. De esta manera queda dividido todo el plano en una red de paralelogramos, cuyos puntos reticulares son precisamente los puntos periódicos $n\omega + n'\omega'$.

Si imaginamos *dibujada esta red o cualquiera otra de las que de ella se deducen por traslación* paralela, la doble periodicidad de la función quiere decir simplemente que $f(z)$, en puntos *congruentes*, es decir, en puntos que en paralelogramos di-

[1] Se aclaran todos estos teoremas aplicándolos y demostrándolos para $e^{2\pi i z}$ y las funciones trigonométricas.

ferentes tienen posiciones congruentes (su diferencia es, por tanto, un período) toma los mismos valores y tiene las mismas singularidades.

Para estudiar completamente una función doblemente periódica, basta, por consiguiente, hacerlo en uno de los paralelogramos de la red, por ejemplo, en el llamado «paralelogramo fundamental» de vértices $0, \omega, \omega + \omega', \omega'$, o en *cualquiera otro* que de él se obtenga por traslación paralela. Toda propiedad regular o singular que tenga la función en un punto z_0 la tiene en un conjunto de puntos $z_0 + n\omega + n'\omega'$, que constituye el de puntos reticulares de nuestra red paralelogramática.

De esta observación resulta inmediatamente el

Teorema 1.°: No existe ninguna función *entera* doblemente periódica (**Primer teorema de Liouville**).

Demostración: Como función entera, $f(z)$ es acotada en todo recinto finito. En todo paralelogramo se verifica, pues, una relación de la forma $|f(z)| < K$, en la que K es una cierta constante; pero entonces, siendo la función doblemente periódica, en todos los demás puntos, y, por consiguiente, en todo el plano, sería $|f(z)| < K$, de donde se seguiría (I, § 30, 1.°) que $f(z)$ sería una constante, caso trivial que hemos excluído de nuestras consideraciones.

Una función doblemente periódica tiene, pues, en el paralelogramo periódico (1) un punto singular, por lo menos. La naturaleza de estos puntos singulares, que, naturalmente, son los mismos en todos los paralelogramos, suele servir de base para la clasificación de las funciones doblemente periódicas.

Definición: Se llama **función elíptica** toda función doblemente periódica que en todo paralelogramo periódico no tiene otras singularidades que polos (2); o, dicho de

(1) Es decir, en *uno cualquiera*; por consiguiente, en *todo*.

(2) Su número es, pues, necesariamente finito dentro de cada paralelogramo.

otro modo, una función *meromorfa* doblemente periódica.

En lo que sigue, vamos a ocuparnos únicamente con estas funciones elípticas. La primera cuestión que aquí debería presentarse es la de si existen tales funciones (1), pues hasta ahora no nos hemos encontrado con ninguna. Sin embargo, como veremos en seguida, la función examinada en el ejemplo 2.° del § 6 es una función doblemente periódica, por lo cual no nos preocuparemos por ahora de la cuestión de existencia.

Por definición, una función elíptica sólo puede tener un número finito de polos en cada paralelogramo periódico. Si se quiere numerarlos, hay que comenzar por fijar convenientemente cuáles bordes de un paralelogramo se han de contar como pertenecientes a éste. Convendremos en contar como *pertenecientes al paralelogramo fundamental, sólo el vértice* 0 *y los dos lados que parten de este punto, excluídos sus extremos*, y cosa análoga para todos los demás paralelogramos que de él se deducen por traslación. Con este convenio, se logra, evidentemente, que a cada punto del plano le corresponda uno, y sólo uno, congruente con él en cada paralelogramo de la red, con lo cual ya tiene sentido inequívoco hablar de los polos de una función elíptica contenidos en el «paralelogramo periódico», y así podemos poner la siguiente

Definición: Se llama **orden** de una función elíptica la suma de los órdenes de sus polos contenidos en el paralelogramo periódico.

Con esta definición, el primer teorema de Liouville puede enunciarse en esta forma:

Teorema 1.°: No hay ninguna función elíptica (no constante) de orden 0. También se deduce inmediatamente el

Teorema 2.°: La suma, la diferencia, el producto y el cociente de dos funciones elípticas correspondientes al mismo

(1) Su descubrimiento, que se remonta a Jacobi y Abel, ha sido uno de los más importantes en el campo de la ciencia.

paralelogramo periódico, así como la derivada de una función de esta especie, es otra función de la misma naturaleza.

Además, teniendo en cuenta el teorema 1.°, resulta:

Teorema 3.°: Si dos funciones elípticas relativas al mismo paralelogramo periódico tienen en él los mismos polos con las mismas partes principales, sólo se diferencian en una constante aditiva. Pues su diferencia es una función elíptica de orden 0.

Los residuos en los polos de una función elíptica están ligados por el

Teorema 4.°: La suma de los residuos en los polos de una función elíptica contenidos en el paralelogramo periódico es siempre $= 0$. **(Segundo teorema de Liouville.)**

Demostración: En virtud de lo dicho en I, § 35, la suma en cuestión — prescindiendo del factor $2\pi i$ — es la integral $\int f(z)dz$ tomada en sentido positivo a lo largo del contorno del paralelogramo, si en el contorno no hay ningún polo, cosa que siempre puede lograrse mediante una traslación suficientemente pequeña (por ejemplo, en la dirección de una diagonal). Podemos, pues, suponer que siempre ocurre así. Entonces, si a es el vértice que se cuenta como perteneciente al paralelogramo, será

$$\int f(z)\,dz = \int_a^{a+\omega} f(z)\,dz + \int_{a+\omega}^{a+\omega+\omega'} f(z)\,dz + \int_{a+\omega+\omega'}^{a+\omega'} f(z)\,dz + \int_{a+\omega'}^{a} f(z)\,dz;$$

y se ve inmediatamente que la primera y la tercera integral y lo mismo la segunda y la cuarta, tienen los mismos valores y de signos contrarios; su suma es, pues, nula. Y, en efecto, si en la tercera integral se pone $z + \omega'$ en lugar de z, resulta

$$= \int_{a+\omega}^{a} f(z+\omega')\,dz = -\int_a^{a+\omega} f(z)\,dz,$$

por consiguiente igual y de signo contrario a la primera; y lo mismo se dice para la segunda y cuarta. La suma de los residuos es, por lo tanto, 0, como se quería demostrar.

De este teorema es consecuencia inmediata el

Teorema 5.°: No existe ninguna función elíptica de primer orden.

Demostración: Si existiera, tendría en el paralelogramo periódico sólo *un* polo de primer orden; designando por c su residuo, la suma de residuos en el paralelogramo sería también c; luego, según el teorema anterior, debería ser $c = 0$, es decir, no puede haber un polo de esta naturaleza.

Según el teorema 2.°, si $f(z)$ es función elíptica, también $\frac{f'(z)}{f(z)}$ lo es respecto al mismo paralelogramo. Aplicándole el teorema 4.°, que acabamos de demostrar, y teniendo en cuenta las demostraciones dadas en I, § 35, teoremas 1.° y 2.°, resulta el

Teorema 6.°: El número de los *ceros* de una función elíptica contenidos en el paralelogramo periódico es igual al de sus polos — por consiguiente, a su orden. **(Tercer teorema de Liouville.)**

Aplicando este teorema a la función $f(z) - a$, se obtiene, finalmente, el siguiente, que resuelve completamente la cuestión del conjunto de valores de una función elíptica:

Teorema 7.°: Una función elíptica de orden m toma *todos* los valores en el paralelogramo periódico, y cada *uno de ellos* m *veces.*

Después de estas consideraciones generales, vamos a ocuparnos ahora en la construcción efectiva de una función elíptica y en la investigación de sus propiedades más importantes. Desde luego, y como ya antes se ha indicado, la función $\wp(z)$ establecida en el ejemplo 2.° del § 6 es una función elíptica. Demostraremos primero que lo es su derivada. Como esta derivada puede ser obtenida derivando

término a término la serie que define la función $\wp(z)$, se tiene

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} - 2\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{1}{(z-z_\lambda)^3}$$

que, representando por z_0 el origen, puede también ponerse bajo la forma

$$\wp'(z) = -2\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{1}{(z-z_\lambda)^3} = -2\sum_{k,k'}\frac{1}{(z-k\omega-k'\omega')^3},$$

si en la última serie k y k' toman, independientemente uno de otro, *todos* los valores enteros $\gtreqless 0$ en cualquier orden. Ahora bien, si k toma *todos* los valores enteros $\gtreqless 0$, lo mismo hace $k-1$; luego, poniendo $z+\omega$ en lugar de z, tendremos:

$$\wp'(z+\omega) = -2\sum_{k,k'}\frac{1}{(z-(k-1)\omega-k'\omega')^3},$$

es decir, la misma serie; luego

$$\wp'(z+\omega) = \wp'(z);$$

y del mismo modo se estabiece que es

$$\wp'(z+\omega') = \wp'(z).$$

Con esto queda *demostrada la doble periodicidad de* $\wp'(z)$ *y, por consiguiente, la existencia de funciones doblemente periódicas.*

Aun podemos demostrar, además, que ω y ω' son un par de períodos primitivos de $\wp'(z)$ y, en consecuencia, que los números $z_\lambda = k\omega + k'\omega'$ constituyen *todos* sus períodos. Y, en efecto, si Ω es un período cualquiera de $\wp'(z)$, para todo

punto del campo de regularidad de $\wp'(z)$ es $\wp'(z+\Omega) = \wp'(z)$. Haciendo que z tienda a confundirse con uno de los puntos reticulares z_λ [es decir, uno de los polos de $\wp'(z)$], la función $\wp'(z)$ y, por tanto, $\wp'(z+\Omega)$ se hacen infinitamente grandes; luego $z_\lambda + \Omega$ tiene que ser también polo de $\wp'(z)$ y, por consiguiente, también, un punto reticular z_μ, de donde se sigue que es $\Omega = z_\mu - z_\lambda$, luego de la forma $k\omega + k'\omega'$, como se quería demostrar.

Ahora es ya muy fácil ver que *también* $\wp(z)$ *es función doblemente periódica*, con el mismo par de períodos primitivos. Pues, según lo antes demostrado, es

$$\wp'(z+\omega) - \wp'(z) = 0,$$

luego

$$\wp(z+\omega) - \wp(z) = c,$$

representando por c una cierta constante, Pero ésta tiene que ser nula, pues la expresión de $\wp(z)$ obtenida en el § 6 muestra que es $\wp(-z) = \wp(z)$. En dicha expresión k y k' toman, independientemente uno de otro, *todos los valores enteros*, pero sin poder ser nulos simultáneamente; luego lo mismo se puede poner $-k$ y $-k'$ en lugar de k y k', de donde se sigue (por el exponente 2) que tampoco la sustitución de z por $-z$ ocasiona cambio alguno en la serie, lo cual demuestra que $\wp(z)$ es, realmente, una función *par*. Por consiguiente, poniendo $z = -\frac{1}{2}\omega$ en la relación $\wp(z+\omega) - \wp(z) = c$, resulta, en efecto,

$$\wp(\tfrac{1}{2}\omega) - \wp(-\tfrac{1}{2}\omega) = 0 = c.$$

Tenemos, pues,

$$\wp(z+\omega) = \wp(z);$$

y del mismo modo se demuestra que también es

$$\wp(z+\omega') = \wp(z),$$

lo cual prueba la doble periodicidad de $\wp(z)$. Por último, ω y ω' forman un par de períodos *primitivos*, por serlo de $\wp'(z)$ y porque siempre, de un modo general, de

$$\wp(z+\Omega)=\wp(z) \qquad \text{se deduce} \qquad \wp'(z+\Omega)=\wp'(z),$$

es decir, que $\wp(z)$ no tiene otros períodos que los de $\wp'(z)$.

Los resultados obtenidos se resumen en el

Teorema 8.°: Existen funciones doblemente periódicas que tienen un par de períodos primitivos *dados*. La función $\wp$ de Weierstrass es un primer ejemplo de tales funciones.

Esta función puede considerarse, por muy diversas razones, como la más sencilla de las funciones elípticas. En efecto, no habiendo funciones elípticas de orden 0 ni de primer orden, las más sencillas son las de segundo orden; y entre ellas deberá tomarse como la más simple la que en el paralelogramo periódico tenga precisamente un polo de segundo orden — designémoslo por ζ — con la parte principal más sencilla $\frac{1}{(z-\zeta)^2}$. Si este polo está en «el» vértice $\zeta=0$, se obtiene precisamente la función $\wp(z)$, prescindiendo únicamente, según el teorema 3.°, de constantes aditivas.

También esta constante — que por sí misma puede ser cualquiera — puede imaginarse fijada de un modo muy simple. En efecto, para el entorno de cada polo, la función puede desarrollarse en una serie de Laurent; para el entorno del origen, este desarrollo tiene la forma

$$\wp(z)=\frac{1}{z^2}+c_0+c_2z^2+c_4z^4+\dots \qquad (1)$$

(1) Pues la parte principal es $=\left(\frac{1}{z-\zeta}\right)^2=\frac{1}{z^2}$, y como ya se ha visto que $\wp(z)$ es función *par*, no puede haber ninguna potencia de grado impar.

en el cual la constante c tiene que ser nula, como se ve poniendo $z=0$ en la fórmula

$$\wp(z)-\frac{1}{z^2}=\sum_{\lambda=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(z-z_\lambda)^2}-\frac{1}{z_\lambda^2}\right].$$

Esta función elíptica «más sencilla» desempeña en la teoría de las funciones elípticas de *Weierstrass* un papel de importancia análoga al de la función exponencial en la de las funciones simplemente periódicas (1). Sólo en algunos ejemplos podremos ver esta significación de la función $\wp(z)$. Demostraremos primero (§ 8, teorema 5.°) el siguiente fundamental

Teorema 9.°: La función $w=\wp(z)$ satisface a la *ecuación diferencial algebraica de primer orden*

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2=(w')^2=4w^3-g_2w-g_3,$$

en la que g_2 y g_3 son ciertas constantes, las llamadas «*invariantes* de la función $\wp$», determinadas únicamente por ω y ω'. Esta ecuación no contiene la variable independiente, y ω' es una función algebraica de ω.

Demostración: De la serie antes utilizada para $\wp(z)-\frac{1}{z^2}$, poniendo para abreviar (para $n\geqq 3$)

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{1}{z_\lambda^n}=s_n \qquad (2)$$

(1) En la antigua teoría de Jacobi desempeña el papel de la «más sencilla» una función que tiene en el paralelogramo periódico dos polos diferentes, de primer orden, con residuos opuestos (cosa entonces necesaria).

(2) Estas series, para $n\geqq 3$ son absolutamente convergentes, según lo dicho en a página 189.

y teniendo en cuenta que es

$$\frac{1}{(z-z_\lambda)^2} = \frac{1}{z_\lambda^2} + 2\frac{z}{z_\lambda^3} + 3\frac{z^2}{z_\lambda} + \dots$$

y el teorema de las series dobles de Weierstrass (I, § 23):

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + 2s_3 z + 3s_4 z^2 + 4s_5 z^3 + 5s_6 z^4 + \dots$$

Siguiendo a Weierstrass, pongamos ahora

$$60s_4 = g_2 = 60 \sum_{k,k'}' \frac{1}{(kw + k'w')^4}$$

y

$$140s_6 = g_3 = 140 \sum_{k,k'}' \frac{1}{(kw + k'w')^6}$$

y observemos que todas las s_n con índice impar son $= 0$ (1), y tendremos para primeros términos del desarrollo buscado

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{g_2}{20}z^2 + \frac{g_3}{28}z^4 + \dots$$

De aquí se sigue, además,

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} + \frac{g_2}{10}z + \frac{g_3}{7}z^3 + \dots;$$

$$(\wp(z))^3 = \frac{1}{z^6} + \frac{3}{20}g_2 \cdot \frac{1}{z^2} + \frac{3}{28}g_3 + \dots;$$

y formando con estos desarrollos la expresión

$$(\wp'(z))^2 - (4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3),$$

(1) Como cada dos puntos reticulares son de valores iguales y de signos contrarios, se destruyen cada dos sumandos de s_n, si n es impar.

se obtiene, desde luego, según el teorema 2.°, una función elíptica con los mismos períodos y los mismos polos. Se ve, además, en seguida, que en ella el desarrollo correspondiente al entorno del origen no contiene ninguna potencia de exponente negativo; luego, según el teorema 1 a, esta función se reduce a una constante, la cual tiene que ser 0, porque el cálculo demuestra que falta el término independiente en el desarrollo. Resulta, pues, conforme al enunciado

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3,$$

dando a g_2 y g_3 la significación indicada (1). Recíprocamente, dicha ecuación diferencial determina sin ambigüedad, como es sabido, la función que la satisface, siempre que se conozca un par de valores correspondientes de las variables. Para la función $\wp$, uno de estos pares es, por ejemplo, $z = 0$ y $w = \infty$; y, por consiguiente, de

$$\frac{dw}{dz} = \sqrt{4w^3 - g_2 w - g_3},$$

(1) Este resultado es muy importante en muchos sentidos. Hagamos observar o siguiente: La ecuación

$$y^2 - (4x^3 - g_2 x - g_3) = 0$$

define y como función (multiforme) de x, y x como función de la misma especie de y (suponemos que x e y, y, más adelante, t son variables complejas). Cada una de éstas x e y, es función algebraica de la otra (véase el cap. V) o, como suele decirse, son representaciones «reales» mutuas: la ecuación define una *curva algebraica*. Pues ,bien, el resultado arriba obtenido muestra que

$$x = \wp(t), \quad y = \wp'(t)$$

es una representación paramétrica de esta «curva».

Este hecho de haber encontrado dos funciones *uniformes* de un parámetro t, que representan exactamente la misma curva que la ecuación implícita dada, que define cada una de las variables x e y como función multiforme de la otra, justifica el decir que se ha **uniformizado** la curva. Aquí, pues, se ha uniformizado una curva especial de tercer orden por medio de la función $\wp$.

Un caso más simple de uniformización es el que se logra para el círculo $x^2 + y^2 - 1 = 0$ utilizando las funciones trigonométricas en la forma $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$.

El problema de la uniformización, que acabamos de indicar, es de una gran mportancia en la moderna Teoría de funciones

Manuel Alberto del Castillo

se sigue que es

$$z = \int_{\infty}^{w} \frac{dw}{\sqrt{4w^3 - g_2 w - g_3}},$$

y, por tanto w es la función *inversa* de la función $z = z(w)$ (1) definida por esta integral. Una integral de esta naturaleza, —más general, una integral cuyo integrando es una función racional de la variable y de una raíz cuadrada de una función racional entera de 3.° ó 4.° grado de la misma variable— se llama una **integral elíptica** (simplemente por el hecho, no muy importante, de haberse considerado por primera vez al tratar de rectificar la elipse). *Abel* y *Jacobi* reconocieron, por primera vez, en las funciones inversas de las definidas por tales integrales, el carácter de doblemente periódicas, y a esta circunstancia deben éstas la denominación de «funciones elípticas».

Para terminar, nos proponemos demostrar un teorema que, en cierto sentido, da una síntesis del conjunto de *todas* las funciones elípticas:

Teorema 10: *Toda función elíptica*, en la que ω y ω' sean un par de períodos primitivos, *puede ser representada como función racional de la función* $\wp$ *correspondiente y de sus derivadas* (2).

La *demostración* nos da ocasión al mismo tiempo de conocer otras propiedades importantes de estas funciones.

(1) Hemos partido de los períodos ω y ω' y construído la función $\wp$ correspondiente, y hemos encontrado para ésta la ecuación diferencial antes escrita, en la que g_2 y g_3 están determinados sólo por ω y ω'. El llamado *problema de la inversión* consiste en ver si, recíprocamente, pueden ser dados arbitrariamente g_2 y g_3 y si entonces la función inversa de la integral $z = z(w)$ es una función $\wp$ cuyos invariantes sean los números dados g_2 y g_3.

(2) Según el teorema 2.° es evidente que, recíprocamente, toda función racional de $\wp(z)$ y sus derivadas es una función elíptica con el mismo par de períodos.

De $\wp(z+\omega) = \wp(z+\omega') = \wp(z)$ se deduce (pág. 203)

$$(1) \qquad \frac{\sigma'}{\sigma}(z+\omega) = \frac{\sigma'}{\sigma}(z) + \eta; \quad \frac{\sigma'}{\sigma}(z+\omega') = \frac{\sigma'}{\sigma}(z) + \eta',$$

designando por η y η' constantes apropiadas (1). Y de aquí nuevamente se sigue:

$$\sigma(z+\omega) = c \cdot e^{\eta z}\sigma(z), \qquad \sigma(z+\omega') = c' \cdot e^{\eta' z}\sigma(z).$$

Como también $\sigma(z)$ es una función impar, se obtienen las nuevas constantes poniendo $z = -\frac{1}{2}\omega$, y resulta:

$$(2) \qquad \begin{cases} \sigma(z+\omega) = -e^{\eta(z+\frac{1}{2}\omega)}\sigma(z), \\ \sigma(z+\omega') = -e^{\eta'(z+\frac{1}{2}\omega')}\sigma(z). \end{cases}$$

Las mismas dos integraciones aplicadas al desarrollo de Laurent de $\wp(z)$, para el entorno del origen, dan como primeros términos de los desarrollos correspondientes al mismo entorno:

$$(3) \qquad \frac{\sigma'}{\sigma}(z) = \frac{1}{z} + b_3 z^3 + \ldots,$$

$$(4) \qquad \sigma(z) = z + d_5 z^5 + \ldots,$$

en los cuales los coeficientes b_3 y d_5 son fácilmente calculables y no hace falta conocer los términos que siguen.

Teniendo en cuenta (2) se ve ahora que la función

$$-\frac{\sigma(z-a)\,\sigma(z+a)}{\sigma^2(z)\cdot\sigma^2(a)},$$

en la que a es un punto cualquiera no reticular, tiene los dos

(1) Como $\frac{\sigma'}{\sigma}(z)$ es una función impar, poniendo $z = -\frac{1}{2}\omega$ resulta $\frac{1}{2}\eta = \frac{\sigma'}{\sigma}(\frac{1}{2}\omega)$, y, por consiguiente, según lo dicho en la página 203, se puede calcular η por medio de una serie; naturalmente, lo mismo ocurre con η'.

períodos ω y ω' y, por consiguiente, representa una función elíptica, $\varphi(z)$, correspondiente al mismo paralelogramo. Esta función tiene, pues, sólo un polo de segundo orden en $z = 0$; y como es

$$\sigma(z \pm a) = \pm\, \sigma(a) + \sigma'(a)\cdot z \pm \tfrac{1}{2}\sigma''(a)\cdot z^2 + \ldots$$

el comienzo del desarrollo de $\varphi(z)$ para el entorno del origen será (pág. 203):

$$\varphi(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{\sigma(a)\cdot\sigma''(a) - (\sigma'(a))^2}{\sigma^2(a)} + c_2 z^2 + \ldots$$

$$= \frac{1}{z^2} - \wp(a) + e_2 z^2 + \ldots,$$

en cuyo desarrollo, lo mismo que antes, no es preciso el conocimiento de los coeficientes $e_2, \ldots$

Este comienzo del desarrollo demuestra que

$$\varphi(z) - \wp(z) + \wp(a)$$

es la constante 0, pues es una función elíptica de orden 0 que se anula para $z = 0$. Si, para mejor hacer resaltar la libertad de elección de a, ponemos z' en lugar de a, resulta la siguiente fórmula fundamental:

$$\wp(z) - \wp(z') = -\frac{\sigma(z - z')\cdot\sigma(z + z')}{\sigma^2(z)\cdot\sigma^2(z')}.$$

Derivando logarítmicamente esta fórmula, primero respecto a z y después respecto a z', y sumando los resultados, se obtiene el llamado *teorema de adición de la función* $\frac{\sigma'}{\sigma}(z)$:

$$\frac{\sigma'}{\sigma}(z + z') = \frac{\sigma'}{\sigma}(z) + \frac{\sigma'}{\sigma}(z') + \frac{1}{2}\,\frac{\wp'(z) - \wp'(z')}{\wp(z) - \wp(z')}.$$

Derivando nuevamente respecto a z, resulta de aquí el teorema de adición de la función $\wp(z)$:

$$\wp(z + z') = \wp(z) - \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\wp'(z) - \wp'(z')}{\wp(z) - \wp(z')}\right) \text{ (1)}.$$

Después de estos preliminares, puede ya demostrarse el teorema 10 de la siguiente manera:

Sea $f(z)$ la función elíptica dada, que tiene en su paralelogramo periódico fundamental los k polos $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_k$ con las respectivas partes principales

$$h_\lambda(z) = \frac{a_{-1}^{(\lambda)}}{z - \zeta_\lambda} + \ldots + \frac{a_{-\alpha_\lambda}^{(\lambda)}}{(z - \zeta_\lambda)^{\alpha_\lambda}};$$

por consiguiente, $f(z)$ es una función elíptica de orden $m = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k$. Como cada una de las funciones

$$\frac{\sigma'}{\sigma}(z), \qquad \wp(z), \qquad -\frac{1}{2!}\wp'(z), \qquad +\frac{1}{3!}\wp''(z), \ldots$$

tiene en el origen un polo con la sencilla parte principal, respectivamente,

$$\frac{1}{z}, \qquad \frac{1}{z^2}, \qquad \frac{1}{z^3}, \qquad \frac{1}{z^4}, \ldots$$

(1) Si una vez hecha la derivación se tiene en cuenta la ecuación diferencial de $\wp(z)$ — de la que se ded: : $\wp''(z) = 6\,\wp^2(z) - \frac{1}{2}g_2$ — el teorema de la adición puede expresarse también en esta forma:

$$\wp(z + z') = \frac{[2\,\wp(z)\wp(z') - \frac{1}{2}g_2]\,[\wp(z) + \wp(z')] - g_3 - \wp'(z)\wp'(z')}{2\,[\wp(z) - \wp(z')]^2}$$

en la cual se reconoce su cualidad de *teorema de adición algebraica* (§ 8, teor. 3.°), puesto que $\wp'(z)$ y $\wp'(z')$ son funciones algebraicas de $\wp(z)$ y $\wp(z')$.

se ve en seguida que la función

$$H_\lambda(z) = a_{-1}^{(\lambda)} \cdot \frac{\sigma'}{\sigma}(z - \zeta_\lambda) + a_{-2}^{(\lambda)} \cdot \wp(z - \zeta_\lambda) - \frac{a_{-3}^{(\lambda)}}{2!} \wp'(z - \zeta_\lambda) + \ldots$$

$$+ \frac{(-1)^{\alpha_\lambda} a_{-\alpha_\lambda}^{(\lambda)}}{(\alpha_\lambda - 1)!} \wp^{(\alpha_\lambda - 2)}(z - \zeta_\lambda)$$

es meromorfa y tiene en ζ_λ un polo con la parte principal $h_\lambda(z)$.

Teniendo en cuenta los términos en que hemos formulado el teorema que ahora tratamos de demostrar, pongamos para abreviar:

$$H_\lambda(z) = a_{-1}^{(\lambda)} \cdot \frac{\sigma'}{\sigma}(z - \zeta_\lambda) + R_\lambda(\wp, \wp', \ldots),$$

designando por R_λ una función racional de su argumento. Formando entonces la suma de todas las $H_\lambda(z)$, $(\lambda = 1, 2, \ldots, k)$ se obtiene el polinomio

$$a_{-1}^{(1)} \frac{\sigma'}{\sigma}(z - \zeta_1) + a_{-1}^{(2)} \frac{\sigma'}{\sigma}(z - \zeta_2) + \ldots + a_{-1}^{(k)} \cdot \frac{\sigma'}{\sigma}(z - \zeta_k),$$

que, según el teorema de adición de la función $\frac{\sigma'}{\sigma}(z)$, puede ponerse bajo la forma de

$$(a_{-1}^{(1)} + a_{-1}^{(2)} + \ldots + a_{-1}^{(k)}) \frac{\sigma'}{\sigma}(z) - \left[a_{-1}^{(1)} \frac{\sigma'}{\sigma}(\zeta_1) + \ldots + a_{-1}^{(k)} \frac{\sigma'}{\sigma}(\zeta_k)\right]$$

+ una función racional de $\wp(z)$ y $\wp'(z)$.

Pero, según el teorema 4.°, el primer paréntesis de la expresión última es $= 0$, y, como el paréntesis cuadrado es constante, dicho polinomio se puede expresar en función racional de $\wp$ y $\wp'$. Designándolo por $R_0(\wp, \wp')$, tendremos, pues,

$$H_1(z) + \ldots + H_k(z) = R_0(\wp, \wp') + \sum_{\lambda=1}^{k} R_\lambda(\wp, \wp', \ldots).$$

Por consiguiente, la suma de todos los $H_\lambda(z)$ es una función racional de $\wp(z)$ y sus derivadas, luego función elíptica [a pesar de no serlo los sumandos $\frac{\sigma'}{\sigma}(z - \zeta_\lambda)$]. Restándola de $f(z)$, evidentemente pierde esta función todos sus polos y, por consiguiente, se reduce a una constante C_0, con lo cual resulta la expresión

$$f(z) = C_0 + R_0(\wp, \wp') + \sum_{\lambda=1}^{k} R_\lambda(\wp, \wp, \ldots) = R(\wp, \wp', \ldots),$$

indicada en el enunciado [1].

El estrecho marco de esta obrita nos obliga a conformarnos con la exposición de estas pocas propiedades escogidas en la muy vasta teoría de las funciones elípticas.

Problemas: 1.° Demostrar que si ω es positivo y ω' es imaginario positivo, la función $\wp(z|\frac{1}{2}\omega, \frac{1}{2}\omega')$ es real en el contorno del paralelogramo fundamental (en este caso, pues, un rectángulo).

2.° ¿En qué recinto del plano w viene representado el rectángulo fundamental por la función $w = \wp(z)$, supuestas las condiciones del problema anterior?

3.° Como complemento al problema anterior, efectuar la representación conforme de un rectángulo dado sobre el círculo unidad.

4.° ¿Es elíptica la función $e^{\wp(z)}$?

5.° Desarrollar la demostración del teorema de adición algebraica de la función $\wp$ indicada en la nota al pie de la página 239.

6.° Demostrar que la función $\wp'(z)$ tiene, dentro del paralelogramo fundamental, los ceros de primer orden $\frac{1}{2}\omega$, $\frac{1}{2}(\omega + \omega')$, $\frac{1}{2}\omega'$ y ningún otro.

---

(1) Derivando sucesivamente la igualdad $\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$ se obtiene: $\wp'' = 6\wp^2 - \frac{1}{2}g_2$; $\wp''' = 12\wp\wp'$; $\wp'''' = 12\wp'^2 + 12\wp\wp'' = 120\wp^3 - 18g_2\wp - 12g_3, \ldots$

Se ve que, en general, *todas* las derivadas de orden superior al primero de $\wp(z)$ se pueden expresar como funciones enteras racionales de $\wp(z)$ y $\wp'(z)$. Utilizando esta propiedad, el enunciado del teorema 10 puede precisarse más diciendo que **todas** *las funciones elípticas admiten una expresión racional en función de* $\wp(z)$ y $\wp'(z)$.

Manuel Alberto del Castillo

SEGUNDA PARTE

FUNCIONES MULTIFORMES

CAPÍTULO IV

RAÍCES Y LOGARITMOS

§ 10. Preliminares acerca de las funciones multiformes y las superficies de Riemann

Volvamos ahora sobre lo dicho en el capítulo VIII del tomo I y, en particular, en el § 27. Vimos entonces cómo, en general, se pueden deducir del conocimiento de un primer elemento de función, dado, por ejemplo, en forma de serie potencial, mediante prolongaciones analíticas — cada una de las cuales siempre es unívoca y determinada — nuevos elementos de función y, por consiguiente, ampliar el campo de existencia de ésta. Este proceso de prolongación lo imaginábamos seguido en tanto que fuera posible, y la función analítica completa así obtenida decíamos que era *uniforme* cuando, cualquiera que fuese el camino por el que se hubiera llegado a un punto z_0 al realizar las prolongaciones, la función se comportase siempre del mismo modo; así, pues, un punto z_0 que *una vez* apareciese interior a uno de los círculos de convergencia, *nunca* podría ser obstáculo para una nueva prolongación, y en *toda* prolongación de la función le correspondería siempre el mismo valor. Resulta, por

tanto, que en tal caso todos los puntos del plano z se distinguen, sin que quepa duda acerca de ninguno, en regulares y no regulares, y a cada uno de los primeros le corresponde un valor, y sólo uno, de la función. El conjunto de los puntos regulares forma, con arreglo a lo dicho en el I, § 7, un recinto, el recinto o *campo de existencia* de la función, cuyos puntos son « bases » de los valores de la función uniforme $w = f(z)$ (1).

Estas funciones son, naturalmente, más fáciles de obtener (2) que las demás, y por eso nos hemos ocupado en ellas, casi exclusivamente, hasta ahora.

Cosa muy diferente ocurre cuando se trata de una función multiforme, en la que, por consiguiente, ya no se verifica la condición antes dicha al efectuar las sucesivas prolongaciones. Entonces al mismo punto le pueden corresponder distintos valores de la función y a veces el mismo punto aparecerá como regular en una prolongación y como singular en otra. Provisionalmente, imaginemos asignados a cada punto *todos* los valores de la función en todas las posibles prolongaciones en que el punto esté contenido, y, caso de que en *alguna* sea singular, considerémoslo como « singular ».

Si $w = F(z)$ es la figura funcional así obtenida, el símbolo $w = F(z)$ carece ya de sentido determinado al dar un valor a z, puesto que puede tener varias (en número finito o infinito) determinaciones. Los únicos ejemplos de estas funciones que hemos visto con algún detenimiento, son $\sqrt{z}$ y $\log z$.

El *problema fundamental* que entonces se presenta, — formulado, desde luego, de modo muy poco preciso — es, en

(1) Se imagina el valor w, de la función correspondiente a cada punto, z, del campo de existencia unido al punto z, como si éste lo sostuviera.

(2) No hace falta, sin embargo (I, observación de la pág. 117), que se pueda tener el medio de calcular el valor de una función uniforme por medio de una sola expresión, como ocurría siempre en el caso de las funciones enteras y en el de las meromorfas. También el campo de existencia puede ser de las formas más variadas y complicadas, pues puede hasta verificarse el teorema de que para *cada* recinto G (I, pág. 35) haya funciones analíticas cuyo campo de existencia sea precisamente el recinto G y no puedan prolongarse fuera de él.

general, éste: *¿Cómo se distinguen entre sí las diferentes determinaciones de una función multiforme y cómo se ordenan y sintetizan sus valores?*

En ciertos casos la misma cuestión toma esta otra forma: Si un problema que por su naturaleza exige una solución completamente unívoca aparece resuelto mediante una función multiforme, *¿cuál de las determinaciones de esta función es la que debe ser utilizada?*

Dos ejemplos, en los que hacemos uso de la función multiforme, *log*, ya bastante conocida del lector, aclararán el planteamiento y la dificultad de la cuestión:

1.° Sea (véase pág. 167, nota al pie) $H(z) = a_0 + a_1 z + \ldots$ una función entera sin ceros, y designemos por b_0 el valor principal del logaritmo de $a_0 (\neq 0)$. Entonces, $h(z) = \log H(z)$ es una función entera completamente determinada, si se agrega la condición de que deba ser $h(0) = b_0$. Para todo z es $h(z)$ *un* logaritmo de $H(z)$; por ejemplo, $h(1)$ es *un valor* de $\log\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)$ *¿Cuál es?*

2.° Sean a y b dos números complejos diferentes y L una trayectoria que los une, sin pasar por el origen. Entonces $\overset{(L)}{\int_a^b} \frac{dz}{z}$ es un número complejo completamente determinado que, por ser $\frac{d}{dz}\log z = \frac{1}{z}$, está contenido entre los infinitos valores de $\log b - \log a$. *¿Cuál es?*

3.° Sea $f(z)$ una función analítica (I, § 35, teorema 1.°) en el contorno cerrado C y en su interior, y supongamos que *a lo largo* de C sea $f(z) \neq 0$. En este caso, por ser $\frac{d}{dz}((\log f(z)) = \frac{f'(z)}{f(z)}$, la expresión

$$\frac{1}{2\pi i} \overset{(C)}{\int} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \frac{\log f(a) - \log f(a)}{2\pi i}$$

representa, seguramente, un número entero $\gtreqless 0$, si a es un punto cualquiera de C. *¿Cuál es?*

4.° Terminemos estos ejemplos con uno en el que un punto puede ser regular en unas prolongaciones y singular en otras: $\sqrt{-2\pi i}$ tiene dos valores; tomemos uno determinado y designémoslo por c_0. Entonces existe, como se ve fácilmente, una, y sólo una, serie de potencias $\Sigma c_n (z-1)^n$ que comienza con c_0, converge en el entorno de $+1$ y para la cual es

$$[c_0 + c_1(z-1) + \ldots]^2 = -2\pi i + (z-1) - \frac{(z-1)^2}{2} + \ldots$$

que, por consiguiente, representa un valor de $\sqrt{\mathrm{Log}\, z - 2\pi i}$, suponiendo representado por $\mathrm{Log}\, z$ el valor principal de $\log z$. Para este elemento de función, el punto $z = +1$ es, naturalmente, un punto *ordinario*. Imaginemos ahora prolongado este elemento a lo largo del círculo unidad en el sentido positivo — cosa siempre posible — : tendremos entonces que al volver a encontrar el punto $+1$, es *singular*, pues $\mathrm{Log}\, z$ ha aumentado en $2\pi i$ y $\sqrt{\mathrm{Log}\, z}$ no es ya, evidentemente, regular en $z = +1$ [1].

De modo un poco más preciso, puede presentarse también la cuestión en esta otra forma: Sea $w = f_0(z)$ un elemento regular, para $z = z_0$, de la función multiforme $w = F(z)$ e imaginemos que ésta es prolongable a lo largo de la trayectoria L que, desde z_0, conduce a ζ. Entonces se tiene que obtener en ζ un valor completamente determinado de $F(\zeta)$ *¿Qué valor es éste?*

De momento vamos a dar una ligera idea de la manera de vencer estas dificultades, y después que hayamos visto algunos ejemplos en éste y el siguiente artículos, en el último trataremos la cuestión de un modo general.

Supongamos dado el elemento de función del cual se parte, como serie potencial, y recortado del papel su círculo de convergencia, teniendo cada punto como base el valor correspondiente de la función (uniforme). Si se prolonga el elemento primitivo por medio de una serie potencial, tendremos un nuevo círculo de convergencia, que también supondremos recortado y pegado al primer disco en la posición que le co-

(1) Cosa análoga pasa en el campo real: La ecuación $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ representa la línea llamada trifolio de Descartes. Para todos los valores de x, tales que es $0 < x < a\sqrt[3]{4}$, es y triforme. Las ramas superiores de la curva son singulares en $x = a\sqrt[3]{4}$ (el cociente diferencial es ∞) y se «tocan en este punto»; la otra rama de curva sigue regular.

rresponde. Se obtiene así una figura como la representada en I, fig. 7, b. Las partes pegadas tenían sus puntos con los mismos valores de la función de modo que pueden considerarse, para cuanto sigue, como una sola hoja cubierta con dichos valores. Si nuevamente se realiza otra prolongación, se obtiene un nuevo disco que se recorta y pega como antes, y así sucesivamente; cada nuevo disco se pega sobre el anterior, del que se ha obtenido por medio de una prolongación (eo ipso *uniforme*), de la manera indicada.

Si después de varias prolongaciones se llega con uno de los nuevos círculos al primitivo recinto (I, pág. 123, y fig. 8) — por consiguiente, a un círculo que no es el que inmediatamente le precede — el nuevo disco deberá ser pegado al primitivo solamente en tanto en cuanto los dos sean bases de los mismos valores funcionales [1]. En caso contrario, deben quedar desligados uno de otro, y entonces el plano queda cubierto en esta parte por dos hojas, que son bases de valores diferentes de la función, que, sin embargo, en cada una de las hojas es uniforme.

Si imaginamos repetidas todas estas operaciones mientras sea posible, se obtiene una figura *superficial*, que cubre el plano con varias *hojas* que pueden hasta ser infinitas y tienen las formas más variadas y pueden unirse entre sí de los modos más diversos. Esta figura se dice que es la **superficie de Riemann** de la función multiforme $w = F(z)$ definida por el elemento de partida. Sobre ella está completa y unívocamente extendido todo el conjunto de valores de la función $F(z)$, puesto que cada punto de cada hoja es base de un valor de la función, y sólo de uno. (Todos los bordes libres o puntos fronteras de una hoja de esta superficie son singulares para las prolongaciones que la han dado origen; más adelante veremos esto con más pormenores.)

[1] Si la función es uniforme, los discos circulares sucesivos van cubriendo una vez todo el campo de existencia de la función, y la hoja así formada, con los valores de la función adscritos a los puntos de la hoja, dan idea completa de la función..

Aplicaremos estas consideraciones demasiado generales a algunos ejemplos sencillos, en los cuales se podrá ya reconocer la utilidad de este modo de representación, advirtiendo desde luego que, naturalmente, no es esencial que las prolongaciones se efectúen con discos circulares, sino que pueden serlo con cualesquiera otros recintos, siempre que se opere con ellos en la forma indicada.

Problemas: 1.º ¿Puede tener una función multiforme el mismo valor en dos puntos superpuestos de su superficie de Riemann? ¿Puede tener el mismo valor en cada uno de los puntos del entorno de dos de tales puntos?

2 ¿Qué clase de funciones (uniformes o multiformes) quedan definidas por las siguientes fórmulas:

$$\text{(a)}\ \sqrt{e^z}; \qquad \text{(b)}\ \sqrt{\cos z}; \qquad \text{(c)}\ \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 z};$$

$$\text{(d)}\ \sqrt{\wp(z)}; \qquad \text{(e)}\ \sqrt{\wp(z) - \wp(\tfrac{1}{2}\omega)}; \qquad \text{(f)}\ \log(e^z)\,?$$

§ 11. Las superficies de Riemann de $\sqrt[n]{z}$ y log z

1.º La función $w = \sqrt{z}$ puede considerarse como la más sencilla de todas las multiformes. En I, § 28, teor. 2.º, vimos que la función real $\sqrt{x}$ definida para $x > 0$ y positiva para estos valores, es prolongable en el campo complejo. Por ejemplo, para el entorno de $+1$ esta prolongación se realiza mediante la serie binómica

$$[1 + (z - 1)]^{\frac{1}{2}}$$

$$= 1 + \tfrac{1}{2}(z - 1) - \frac{1}{2 \cdot 4}(z - 1)^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}(z - 1)^3 - \ldots$$

Partiendo de este elemento, puede realizarse la prolongación de manera completamente unívoca y sin ningún inconveniente, siempre que se eluda la parte negativa del eje real. Esto quiere decir, en cuanto al proceso de formación de la superficie de Riemann, explicado en el artículo anterior, que

por adición de recintos se puede llenar todo el plano, cortado tan sólo a lo largo del eje real negativo, asignando a cada punto el valor *único* de $\sqrt{z}$ determinado por el elemento escogido como inicial; lo cual se expresa diciendo que de todo el conjunto de valores de $w = \sqrt{z}$ (en cuya función, a cada punto $z \neq 0$ corresponden *dos* valores) se ha cortado una *rama*, analítica en el indicado recinto.

Como el punto 0 es el único singular, se puede prolongar nuevamente la función por los bordes de este recinto; pero si, por ejemplo, prolongamos por el borde superior hacia abajo, ya no se podrán pegar los dos recintos, pues los trozos que se extienden desde el borde superior hacia el semiplano inferior, son bases de *otros* valores de la función, según sabemos, los que resultan de multiplicar por el factor $e^{\frac{2\pi i}{2}} = -1$, por consiguiente, valores iguales y de signo contrario a los que ya tenía asignados. El plano queda, pues, cubierto nuevamente por estos trozos de recinto [1], y como, excluyendo el origen, no hay ningún inconveniente para realizar las prolongaciones, este segundo recubrimiento se extiende nuevamente a todo el plano (con la única excepción del punto 0) hasta volver al eje real negativo, siempre con los mismos valores, pero de signo contrario a los que antes tenía.

Entonces queda todo el plano cubierto por dos hojas que rodean al origen, al modo de espiras de una superficie helicoidal sobre la cual está extendido, sin duplicidad, todo el conjunto de valores de la función (fig. 13). Por encima, lo mismo que por debajo, tiene la superficie un borde libre a lo largo de la parte negativa del eje real, a través del cual puede todavía prolongarse. Si se hace así por el borde superior hacia el semiplano inferior, las partes agregadas, que ahora cubrirían por tercera vez el plano, serían bases de nuevos valores de la función que se obtendrían de los anteriores multiplicándolos por -1, es decir, los mismos valores funcionales que en la hoja más baja en el semiplano inferior. *No* resulta así, pues, una *tercera hoja*, sino que, dicho en pocas palabras, hay que unir los dos bordes libres, *atravesando la hoja intermedia*, con lo cual se termina completamente de una vez, pues entonces ya no queda ningún borde libre y no es posible la prolongación analítica. Hemos obtenido, pues, así la *superficie de Riemann de la función* $w = \sqrt{z}$, sobre la cual está extendido todo, sin duplicidad, el conjunto de los valores de la función.

Sobre esta superficie, $\sqrt{z}$ es una función uniforme de la posición del punto; si sobre ella se va de un punto a otro, cualquiera que sea el camino seguido,

[1] Imaginamos esta segunda hoja colocada *encima* de la primera; lo mismo puede magínarse lo contrario.

la función se comporta enteramente igual que en el caso de una función uniforme [1].

Todo punto diferente del origen, contenido en la superficie, no queda ya determinado por el valor de z solamente; es preciso conocer, además, la hoja a la cual pertenece. Pero como, naturalmente, nada importa la numeración de las hojas, lo que ordinariamente se hace es imaginar construída la superficie, con los valores correspondientes a sus puntos, de cualquier modo, per

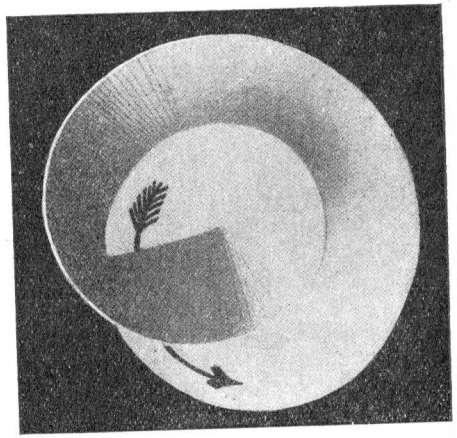

Fig. 13

fijo, y entonces cada punto de la superficie está completamente determinado por su z y el valor que le corresponde de $\sqrt{z}$. Si, para evitar excepciones, contamos como perteneciente a la superficie, pero únicamente una vez, el punto 0 en el cual se unen las dos hojas de la superficie, habremos de asignarle el valor 0 y le llamaremos *punto de ramificación de dos hojas* de la super-

[1] Como, una vez obtenida la primera hoja, lo mismo que se ha prolongado la función hacia abajo podía haberse hecho hacia arriba, o en los dos sentidos, se ve que la forma y posición de la línea de intersección de las dos hojas es completamente indiferente. La intersección *no existe*, por decirlo así, y, en todo caso, radica en lo imperfecto de nuestra concepción empírica del espacio. Obsérvese simplemente que la superficie de Riemann formada tiene ya la propiedad de que en todo punto (diferente de cero) hay dos hojas superpuestas y que de cada uno de dichos puntos se puede volver al mismo después de dar dos vueltas en torno del origen; no es, pues, necesario recurrir a la intersección que en nuestra intuición del espacio se hace precisa, sino que se prescinde totalmente de ella.

ficie (o de ramificación de *primer orden*): entonces se comprueba fácilmente que cada número complejo, w, está unido a un punto, y sólo a uno, de la superficie.

El conjunto de todos los valores asociados a los puntos del entorno de cualquier punto diferente del origen forma una función uniforme analítica, pudiendo, sin que pierda este carácter, ser ampliado el entorno mientras pertenezca a una sola hoja y, por consiguiente, no contenga el punto 0. Si G es un recinto así constituído (por ejemplo, el círculo de centro z_0 y radio $|z_0|$ en una hoja, o el plano cortado a lo largo del eje real negativo, etc.), se dice que representa, junto con el conjunto de los valores correspondientes, una rama de la función.

(Por ejemplo, si se representa por E la circunferencia unidad recorrida en sentido positivo y se comienza con $+1$ el desarrollo de $\sqrt{z}$ dado en la página 247, será:

$$(E)\int_{+1}^{+1}\frac{dz}{\sqrt{z}} = \left[2\sqrt{z}\right]_{+1}^{+1\,(E)} = -2-2 = -4.)$$

2.º Cosa enteramente semejante acaece con la **función** $w = \sqrt[p]{z}$, $(p > 2)$. Los resultados obtenidos en I, § 28, teor. 2.º, demuestran, por consideraciones análogas a las antes empleadas, que el proceso de prolongación, después de dos vueltas en torno al origen, aun no ha terminado; prolongando a través del borde abierto en la superficie obtenida con las dos vueltas (por ejemplo, a través del borde superior hacia el semiplano inferior), es necesario cubrir el plano una tercera vez para colocar todos los valores de la función, y, repitiendo estas operaciones, sólo cuando se han realizado p veces se ve [1] que al prolongar por el borde indicado hacia el semiplano inferior no se obtienen nuevos valores con que cubrir el plano, sino los mismos que ya estaban ligados a la hoja inferior en el semiplano inferior. Por consiguiente, uniremos entonces el borde superior de la hoja p-sima con el inferior de la primera hoja, atravesando las $p-1$ hojas intermedias. En esta *superficie de Riemann de p hojas, correspondiente a la función* $w = \sqrt[p]{z}$, está repartido todo el conjunto

[2] Los valores asignados a los puntos de la segunda hoja se diferencian de los de la primera en el factor $e^{\frac{2\pi i}{p}}$, los de la tercera en el $e^{2\frac{2\pi i}{p}}$, ..., los de la p-sima en el $e^{(p-1)\frac{2\pi i}{p}}$ y al obtener una nueva hoja en el $e^{p\cdot\frac{2\pi i}{p}} = 1$, es decir, en *nada*.

de valores de la función, y acerca de ella puede repetirse todo cuanto se ha dicho en el caso anterior particular de éste, en el que es $p = 2$. El punto 0 se llama ahora de *ramificación de p hojas* (o de orden $p-1$) y se agrega a la superficie, contándolo una sola vez y haciéndole corresponder el valor 0.

Las mismas consideraciones aplicadas al *plano numérico* pueden ser extendidas a la *esfera numérica* (I, pág. 13, nota al pie), y se llega entonces a una *superficie esférica de Riemann* que cubre con 2 ó p hojas, respectivamente, la esfera numérica. El punto 0 de ramificación de p hojas está entonces en el polo sur y se ve — y ahí radica una de las ventajas del empleo de la esfera numérica — que el polo norte, es decir, el punto ∞ es un punto de análoga condición, por consiguiente, de ramificación de p hojas; resulta, pues, una esfera de Riemann de p hojas con dos puntos de ramificación, ninguno de los cuales desempeña papel diferente que el otro. Del mismo modo que se hizo con el origen, se hace ahora con el punto ∞: se le agrega a la superficie de Riemann, contándolo *una sola vez* y asignándole el valor ∞. Se reconoce inmediatamente que cada número complejo, w, (incluso 0 e ∞) está asociado a un punto, y sólo a uno, de la superficie.

Se da forma más gráfica y expresiva a lo que venimos diciendo, de la siguiente manera: Al estudiar una función $w = f(z)$, en lugar de considerar, como hasta ahora, los puntos z como *bases de los números* w, se imagina junto al plano (o esfera) z, otro plano (o esfera) w y se marca en él el punto $w = f(z)$, que se llama entonces imagen del punto z debida a la función representativa $f(z)$. Si el punto z se mueve de un modo continuo sobre la esfera [naturalmente dentro del campo de definición de $w = f(z)$], también el punto w se mueve de un modo continuo en su esfera; por esto se dice que la representación es *continua*, y por la continuidad de esta representación a todos los puntos, líneas y figuras del plano o esfera z les corresponde una «imagen» en la superficie w. La *naturaleza de esta representación* debe ser considerada como *característica para la función* [1].

Haciendo uso de esta representación, los últimos resultados que hemos obtenido pueden ser expresados así: *Con la función $w = f(z)$ se representa unívocamente en los dos sentidos la esfera de Riemann de p hojas que le corresponde sobre la esfera lisa (es decir, de una sola hoja). A cada punto de cada una de las figuras corresponde uno, y sólo uno, en la otra* [2].

[1] No podemos detenernos en el estudio circunstanciado de las *propiedades* de esta representación — la continuidad es evidente — a pesar de su gran importancia en la teoría de funciones. Para hacerlo, puede acudirse a la obra de *Bieberbach*, tomo 768 de la colección Göschen, Einführung in die konforme Abbildung, 1915 (Introducción al estudio de la representación conforme).

[2] Imaginando unido cada punto, z, de la superficie z, con su imagen correspondiente, w, de la superficie w, por medio de un hilo invisible, el conjunto de todos los hilos así obtenidos representa la «sujeción íntima» de que se habló en I., pág. 123.

3.° De modo análogo que para $w = \sqrt{z}$, se construye la superficie de Riemann para la función $w = \log z$, puesto que también aquí 0 e ∞ son los únicos puntos singulares. Partimos del valor principal correspondiente a $+1$, por ejemplo, por consiguiente, del elemento de función

$$(z-1) - \frac{(z-1)^2}{} + \frac{(z-1)^3}{3} - \dots$$

Según lo dicho en I, § 28, 1.°, se puede efectuar la prolongación, sin inconveniente alguno, y de un solo modo, sobre el plano z cortado a lo largo del eje real negativo, y se obtiene así una función uniforme y analítica en este campo, el *valor principal* o la *rama principal* de la función $\log z$.

Nuevamente se puede prolongar a través de los bordes del corte; haciéndolo, como en el caso de $\sqrt[p]{z}$, se llega a una segunda hoja (que se imagina colocada sobre la primera), cuyos puntos son bases de valores iguales a los correspondientes a los puntos de la hoja inferior aumentados en $2\pi i$. Lo mismo se obtiene una tercera, . . . hoja. La superficie se forma aquí, pues, lo mismo que para $\sqrt[p]{z}$, con la diferencia de que ahora la operación no tiene fin, puesto que cada hoja soporta valores que se deducen de los de la hoja inferior por la agregación de $2\pi i$. Por consiguiente, hay que imaginar que sobre cada hoja siempre hay otra, con lo cual se realiza completamente la representación del proceso de la prolongación hacia arriba, es decir, que no se puede efectuar ninguna otra ampliación en este sentido.

Ha quedado aún libre el borde inferior de la primera hoja y podemos prolongar la función a través de él (en el semiplano inferior). La hoja que así se obtiene deberá ser imaginada por debajo de la primera: soporta valores que se deducen de los correspondientes de la hoja inmediatamente superior (los principales) disminuyéndolos en $2\pi i$; son, pues, nuevos valores. Este proceso de prolongación hacia abajo puede repetirse indefinidamente y agota, como antes, todas las posibilidades; cada hoja soporta valores iguales a los de la inmediatamente superior disminuídos en $2\pi i$. Según esto, debemos imaginar colocada debajo de cada hoja otra, y así obtenemos completa la representación de todo el proceso de formación de la superficie, que ya no admite ampliación ninguna en ningún sentido.

Sobre esta superficie de Riemann de infinitas hojas se extiende de modo *completamente uniforme* el conjunto de valores de $w = \log z$; sobre ella es, pues, $\log z$ una *función uniforme de sus puntos*.

Procediendo con la esfera del mismo modo que hemos hecho en el plano (imaginando, por tanto, infinitas capas esféricas una sobre otra), se ve

inmediatamente que el punto ∞ (polo norte) es exactamente de la misma especie que el punto 0. Tenemos, pues, una *esfera de Riemann de infinitas hojas con dos puntos de ramificación de orden infinito*. Estos puntos de ramificación de infinitas hojas *nunca* son considerados como pertenecientes a la superficie y *nunca* se les hace bases de valores funcionales.

Parece innecesario decir algo acerca de la distribución de los valores de $\log z$ sobre la superficie: En la primera hoja están los valores principales de $\log z = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}$, es decir, los que se obtienen cuando la trayectoria de integración está contenida por entero en el plano cortado a lo largo del eje real negativo; pero, aparte esta condición, es cualquiera. Si partimos, por ejemplo, de $+1$ para ir al punto z marchando primero a lo largo del eje real positivo hasta $|z|$ y, a partir de este punto, a lo largo de la circunferencia de centro 0 y radio $|z|$, recorriendo el arco más corto para llegar a z, se tiene:

$$\log z = \int_1^{|z|} \frac{d\zeta}{\zeta} + \int_{|z|}^{z} \frac{d\zeta}{\zeta} = \int_1^{|z|} \frac{dx}{x} + i \int_0^{\operatorname{arc} z} d\varphi$$

$$= \operatorname{L}\log |z| + i \operatorname{arc} z,$$

donde representamos con $\operatorname{L}\log z$ el logaritmo real del número positivo $|z|$, y se toma

$$-\pi < \operatorname{arc} z \leq +\pi \quad (^1).$$

(La multiformidad de $\log z$ aparece, según esto, como consecuencia inmediata de la del arco argumento de un número complejo). El valor principal de $w = \log z$ satisface, pues, a la condición

$$-\pi < \mathcal{J}(w) \leq +\pi;$$

y, por consiguiente, el *punto* w está en la faja del plano w, de ancho 2π, simétrica respecto del eje real, y caracterizada por esta última desigualdad, y de la relación $z = e^w$ se infiere que, recíprocamente, cada punto de esta faja es imagen de un $z \neq 0$. El valor principal de $\log z$ realiza, pues, la representación unívoca en los dos sentidos del plano cortado, excluído el punto 0.

(1) Agregamos el borde superior del corte (arc $z = +\pi$), exceptuado el origen, al plano cortado, para que todo $z \neq 0$ esté una vez en el plano.

sobre la citada faja del plano w. Los demás valores de $\log z$, cuyas bases son las otras hojas de la superficie, se diferencian sólo de los principales en un sumando de la forma $2k\pi i$, en que k es un número entero, diferente de 0. Los *puntos* w correspondientes, están, por consiguiente, en las fajas caracterizadas por las limitaciones

$$(2k-1)\pi < \mathcal{J}(z) \leq (2k+1)\pi, \quad (k = \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Estas fajas están ligadas a la primera y llenan completamente el plano cubriéndolo una sola vez [1]. Podremos, por consiguiente, decir: *La función* $w = \log z$ *representa unívocamente (y de modo continuo) en los dos sentidos el plano* z *de Riemann de infinitas hojas con dos puntos de ramificación en* 0 *e* ∞ *(no considerados como pertenecientes a la superficie) sobre el plano liso* w, o, de otro modo: Sobre la superficie de Riemann de $\log z$, cada número complejo ($\neq \infty$) está asociado a un punto, y sólo a uno.

Las cuestiones propuestas como ejemplos en la página 244 se resuelven ahora fácilmente:

1.° $\log H(z)$ queda definido completamente, sin ambigüedad, del siguiente modo: la elección de $\log H(0)$ significa que para el punto $H(0)$ comenzamos en una hoja escogida arbitrariamente, pero determinada, de la superficie correspondiente al log. Si partimos de 0 para llegar a un punto z_0, recorriendo dos trayectorias L_1 y L_2, el valor de la función H va de $H(0)$ a $H(z_0)$ recorriendo dos trayectorias, que por ser $H(z) \neq 0$ no pasan por 0 ni pueden encerrar el punto 0 y que, por tanto, las dos conducen sobre la superficie al mismo punto completamente determinado de una hoja también determinada: a ese punto está asociado unívocamente el valor de $\log H(z)$.

2.° $(L)\int_a^b \frac{dz}{z} = \log b - \log a$ debe ahora entenderse así: Comenzamos en el punto a de una hoja cualquiera (es decir, escogemos arbitrariamente $\log a$) y partiendo de él describimos *sobre la superficie correspondiente a la función log* una trayectoria L, que por no pasar por 0 nos lleva al punto b en una hoja determinada, donde figura el valor de $\log b$.

3.° También aquí queda resuelta la cuestión sin ambigüedad, si al recorrer z la curva C hacemos que la trayectoria recorrida por $f(z)$ esté sobre la superficie correspondiente al log. Como última aplicación, vamos a demostrar este

[1] Estas fajas son, evidentemente las *fajas periódicas* de la función e^w. — Según esto, la multiformidad de $w = \log z$, consistente en un sumando arbitrario de la forma $2k\pi i$, aparece como la «inversa» de la periodicidad simple de la función inversa $z = e^w$, que tiene $2\pi i$ como período primitivo.

Teorema: Sean $f(z)$ y $\varphi(z)$ dos funciones analíticas en el recinto simplemente conexo G, y C una línea cerrada, contenida en G, sobre la cual es $f(z)$ diferente de 0 y se conserva en valor absoluto mayor que $\varphi(z)$:

$$f(z) \neq 0 \quad \text{y} \quad |f(z)| > |\varphi(z)| \text{ a lo largo de } C.$$

Entonces, las dos funciones $f(z)$ y $f(z) + \varphi(z)$ tienen el mismo número de ceros en el recinto parcial del G encerrado por C.

Demostración: Según lo dicho en I, § 35, teorema 1.°, basta demostrar que es

$$(C)\int \left[\frac{f'}{f} - \frac{f' + \varphi'}{f + \varphi}\right] dz = \int^{(C)} \frac{\left(1 + \frac{\varphi}{f}\right)'}{\left(1 + \frac{\varphi}{f}\right)} dz = 0.$$

Pero esta última integral es $= \left[\log\left(1 + \frac{\varphi}{f}\right)\right]^{(C)}$, es decir, igual a la diferencia entre los valores inicial y final de $\log\left(1 + \frac{\varphi}{f}\right)$ cuando se describe en sentido positivo una sola vez la línea C. Ahora bien, cuando z recorre la curva C, por ser $\left|\frac{\varphi}{f}\right| < 1$, el valor de $1 + \frac{\varphi}{f}$ se conserva en el semiplano superior (en el círculo de radio 1 y centro $+1$); luego, como allí está completa y unívocamente determinado el (más preciso: todo) logaritmo, aquella diferencia tiene que ser nula, como queríamos demostrar.

Problemas: Calcular las integrales

$$(L)\int_1^i \frac{dz}{\sqrt[p]{z}} \quad \text{y} \quad (L)\int_1^i \log z\,dz,$$

cuando L representa el primer cuadrante de la circunferencia unidad situado en la primera hoja de la superficie de Riemann que hemos construído.

2.° ¿Qué valor puede tener la integral $\int_1^{z_0} \frac{dz}{\sqrt[p]{z}}$ cuando la trayectoria de integración va de uno cualquiera de los (p diferentes) puntos $+1$, pero determinado, a otro cualquiera, también determinado, de los (p diferentes) puntos $z_0 \neq 0$? ¿Qué valores puede tener la integral $\int_1^{z_0} \log z\,dz$ en la misma hipótesis?

Manuel Alberto del Castillo

3.° Demostrar, por medio del último teorema del § 11, el teorema fundamental del Algebra, poniendo

$$\varphi(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_{n-1} z^{n-1} \quad \text{y} \quad f(z) = a_n z^n, \quad (a_n \neq 0)$$

y tomando como línea C una circunferencia de radio suficientemente grande.

§ 12. Las superficies de Riemann de las funciones

$$w = \sqrt{(z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_k)}.$$

La función $w = \sqrt{z-a}$, (a arbitrario), presenta las mismas particularidades que la $w = \sqrt{z}$. En lugar del punto 0, es ahora el punto a de ramificación de dos hojas. En el caso de la esfera, no existe diferencia esencial, porque hay una esfera de Riemann de dos hojas con dos puntos de ramificación, lo mismo que antes; sólo que ahora el punto a sustituye al polo sur. En todo lo demás se aplica sin variación cuanto se dijo en el artículo anterior.

Un paso más lleva de esta función a la $w = \sqrt{(z-a_1)(z-a_2)}$, en cuya expresión a_1 y a_2 son dos números complejos cualesquiera, pero diferentes entre sí. Nuevamente encontramos una esfera de Riemann de dos hojas con los puntos de ramificación de dos hojas en a_1 y a_2. El punto ∞ es ahora, simplemente, como cualquiera otro diferente de los a_1 y a_2, es decir, las dos hojas están en aquel punto superpuestas una sobre otra.

Vamos a deducir esto directamente valiéndonos de los razonamientos generales del § 10; la función

$$w = \sqrt{(z-a_1)(z-a_2)}$$

es analítica en todos los puntos diferentes de los a_1 y a_2. Sea z_0 uno de tales puntos y $\sqrt{z_0-a_1}$ y $\sqrt{z_0-a_2}$ valores arbitrarios, pero que en lo que sigue supondremos determinados, entre los dos que cada uno de ambos radicales puede tener.

Resulta entonces, partiendo del elemento analítico en z_0, utilizando la serie binómica de la pág. 247.

$$f_\lambda(z) = \sqrt{z_0-a_\lambda}\left(1 + \frac{z-z_0}{z_0-a_\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad (\lambda = 1, 2),$$

un desarrollo de w, convergente en el entorno de z_0, que constituye un elemento, f, de nuestra función:

$$f = f_1 \cdot f_2 = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \ldots$$

Construyamos la superficie de Riemann partiendo de este elemento de función; podemos prolongar la función con toda libertad sin más que eludir los puntos a_1 y a_2. Por ser $w = \sqrt{z-a_1}\sqrt{z-a_2}$ sólo podría presentarse un cubrimiento múltiple de un punto z, cuando llegásemos a este punto partiendo de z_0 y recorriendo dos caminos que encerrasen uno de los puntos a_λ. Si, pues, hacemos un corte en el plano, desde a_1 hasta el ∞ pasando por a_2, y no atravesamos nunca, al hacer la prolongación, la línea de corte [1], este proceso de prolongación hace corresponder a cada punto del plano cortado un valor de la función, y sólo uno; de modo que el plano así cortado es base de una rama de la función [2]. Nuevamente podemos prolongar a través de los bordes del corte, y la cuestión es ver si así se obtiene un nuevo cubrimiento o no. Si sólo tuviéramos el elemento $f(z)$ de la función $\sqrt{z-a_1}$, no necesitaríamos más que dar un corte desde a_1 hasta el ∞ (el corte correspondiente al dado a lo largo del eje real negativo en el § 11) y sabríamos que, al atravesarlo, $\sqrt{z-a_1}$ quedaba multiplicado por -1. Lo mismo ocurre para el elemento $f_2(z)$ de la función $\sqrt{z-a_2}$, si damos un corte desde a_2 hasta el ∞. Según esto, el corte antes dado desde a_1, pasando por a_2, hasta el ∞ puede desempeñar este papel para los dos radicales, y resulta así: si se prolonga a través del segmento que va de a_1 a a_2 (así orientado), como f_1 se transforma en $-f_1$ y f_2 permanece invariable, los recintos ya cubiertos se cubren de nuevo con valores iguales y de signo contrario a los anteriores, y se obtiene una segunda hoja — que podemos imaginar, por ejemplo, sobre la primitiva — cubierta de valores opuestos a los de la primera. Esta segunda hoja se une a la primera a lo largo del segmento indicado, *cruzándose*, de modo que *siempre* que se pasa por ese segmento se va de una hoja a otra. La segunda hoja tiene que ser imaginada con un corte desde a_2 hasta el ∞.

Procediendo así, las dos hojas están cortadas a lo largo de la semirrecta $a_2\infty$; traspasando este corte en una nueva prolongación, siempre posible, los dos radicales antes considerados quedan multiplicados por -1, de modo que w queda invariable, es decir, que tal paso no conduce a un nuevo cubrimiento, sino que a lo largo de este corte cada hoja se une a sí misma, con lo cual han desaparecido ya todos los bordes y no es posible ninguna nueva prolongación, y hemos obtenido nuevamente la superficie de Riemann de dos hojas antes descrita, con dos puntos de ramificación.

Sobre esta superficie, $\sqrt{(z-a_1)(z-a_2)}$ es una función uniforme de la posición de z, y si, para evitar excepciones, agregamos a la superficie los

(1) La línea de corte puede ser cualquiera; la única condición que ha de cumplir es no tener ningún punto doble y eludir el punto z_0.

(2) Hacemos uso aquí del siguiente teorema que aclara mucho: Si es $f(z) = f_1(z) \cdot f_2(z)$ (uniforme) y se prolongan f_1 y f_2, el producto de sus prolongaciones es prolongación del producto de las funciones.

puntos a_1 y a_2 (contados *una vez* cada uno) y los hacemos bases del valor 0, y de mismo modo al punto ∞ se le hace base del valor ∞ en cada una de las dos hojas que en él son coincidentes, podremos decir: *Todo* número complejo w (incluído ∞) se encuentra *en dos puntos* de esta superficie de Riemann.

No ofrece ahora ya ninguna dificultad extender estas consideraciones a las funciones

$$w = \sqrt{(z - a_1)(z - a_2) \ldots (z - a_k)},$$

si $k > 2$ y $a_1, a_2, \ldots, a_k$ son números complejos cualesquiera, diferentes entre sí, se hará entonces un corte, sin punto doble, desde a_1 hasta el ∞, pasando por $a_2, a_3, \ldots, a_k$ [1], y se procederá con los k factores $\sqrt{z - a_\lambda}$, $(\lambda = 1, 2, \ldots, k)$, en que se descompone la función que nos ocupa, exactamente lo mismo que antes hemos hecho en los casos de ser $k = 1$ y 2. Se encuentra entonces que las dos hojas se unen, *cruzándose*, entre a_1 y a_2, y lo mismo entre a_3 y a_4, etc., mientras que entre a_2 y a_3, a_4 y a_5, ... cada hoja se une consigo misma. Se obtiene así, tanto en el caso de ser k par como impar (por ejemplo, $k = 2r$ o $= 2r - 1$), una superficie de Riemann de dos hojas con el número par, $2r$, de puntos de ramificación de dos hojas situados en los puntos a_λ y, caso de ser impar k, en el punto ∞ [2].

Como casos particulares interesantes citemos los en que es $k = 3$ y $k = 4$, que conducen a superficies de dos hojas con cuatro puntos de ramificación.

Aparecen, según esto, estas superficies de naturaleza semejante a las de dos puntos de ramificación obtenidas cuando es $k = 1$ y $k = 2$, pero hay una diferencia fundamental entre unas y otras; la esfera de dos hojas con dos puntos de ramificación admite una representación unívoca en los dos sentidos y continúa sobre la esfera lisa, de donde se sigue — con un sencillo razonamiento — que toda curva cerrada de la superficie [3] divide a ésta en dos regiones completamente separadas, exactamente lo mismo que ocurre en el caso de la esfera lisa, lo que suele expresarse diciendo que las dos superficies tienen el mismo *género*, que, en este caso, es 0

La esfera de dos hojas con 4 puntos de ramificación que se obtiene para $k = 3$ y $k = 4$ es, en este aspecto, de naturaleza muy diferente: si, por ejemplo, se ha trazado la curva C contenida por completo en la hoja superior (fig. 14) y que encierra los puntos a_1 y a_2 (pero sólo estos puntos de ramificación), se pueden unir los puntos z_0 y z_1 de la hoja superior, interior el

(1) Si conviene, puede variarse la numeración de los a_λ.

(2) Si k es par, por el contrario, ∞ es un punto ordinario, es decir, las dos hojas se superponen como de ordinario en él, de modo que ∞ está dos veces en la superficie — como se ha visto en el caso de ser $k = 2$.

(3) Es decir, que va de un punto z_0 de una hoja al mismo punto de la misma hoja.

uno y exterior el otro, a C, por medio de una línea situada en la superficie y que no corte a C. En la figura 14 se ha tratado de mostrar esto intuitivamente, marcando con línea llena la porción de trayectoria contenida en la hoja superior y con línea de trazos la parte contenida en la hoja inferior; los cortes a lo largo de los cuales se unen, cruzándose, las dos hojas se han indicado con líneas de puntos [1]. Por esta razón se le asigna a esta superficie otro género, el *género* 1. En general, las superficies con $2r$ puntos de ramificación, correspondientes a los casos $k = 2r - 1$ y $k = 2r$, tienen el *género* $r - 1$

Digamos de paso que estos diferentes modos de comportarse las dos superficies para $\sqrt{1 - w^2}$ y $\sqrt{4w^3 - g_2 w - g_3}$, por ejemplo [2], son la causa fundamental de que las integrales

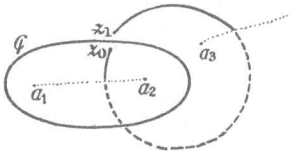

Fig. 14

$$z = \int_0^w \frac{dw}{\sqrt{1 - w^2}} \quad \text{y} \quad z = \int_\infty^w \frac{dw}{\sqrt{4w^3 - g_2 w - g_3}}$$

o, dicho con mayor exactitud, las funciones inversas

$$w = \operatorname{sen} z \quad \text{y} \quad w = \wp(z)$$

sean de naturalezas tan esencialmente distintas, a saber, simple y doblemente periódicas

Problemas: 1. Demostrar el teorema formulado en la página 257, segunda nota al pie.

(1) El corte que parte de a_2 conduce al punto ∞ o al a_4, según que sea $k = 3$ ó $k = 4$, respectivamente.

(2) Para mejor referirnos a lo dicho en los §§ 8 y 9, cambiamos entre sí las letras z y w. Los radicales aquí considerados son, evidentemente, de los tipos tratados, para $k = 2$ y $k = 3$, si se prescinde de un factor constante.

2. ¿Qué valores puede tener la integral $\int_0^{z_0} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$ si la trayectoria es una cualquiera que va de uno determinado de los dos puntos 0 a otro, también determinado, de los dos puntos $z_0(\neq \pm 1)$, eludiendo los puntos ± 1? ¿Tienen sentido estas integrales para $z_0 = \pm 1$ y $z_0 = \infty$; y cuál es?

CAPÍTULO V

FUNCIONES ALGEBRAICAS

§ 13. Planteamiento del problema

Todos los ejemplos de funciones multiformes hasta ahora considerados eran, fuera de $\log z$, *funciones algebraicas*. Se las llama así porque pueden obtenerse mediante la resolución de una ecuación algebraica, es decir, de una ecuación de la forma $G(z,w) = 0$, en cuya expresión, G representa una función racional entera de z y w. Suponiéndola ordenada por las potencias crecientes de w, será de la forma

$$g_0(z) + g_1(z)\cdot w + g_2(z)\cdot w^2 + \ldots + g_m(z)\cdot w^m = 0,$$

en la que los coeficientes $g_\lambda(z)$ son funciones racionales de z solamente.

Si existe un elemento de función, $w = f(z)$, tal que sustituído en dicha ecuación, en lugar de w, la satisfaga idénticamente, es decir, que sea $G(z,f(z)) = 0$ para todos los z de un cierto campo, se dice que $f(z)$ es un elemento de una *función algebraica* definida por la ecuación $G(z,w) = 0$. En los casos de ser $m \leq 4$, se puede poner la función en forma explícita, sin más que resolver la ecuación, y estudiarla así directamente. Para los casos en que es $m > 4$, es sabido que ya no se puede hacer lo mismo; y entonces surge la cuestión

de si una ecuación de esa naturaleza define, *en general*, como en los otros casos, una función y si define *sólo una* [1] y de qué naturaleza es.

Precisemos un poco más las hipótesis hechas: Ante todo, suponemos que $G(z,w) = 0$ es irreducible, es decir, que el polinomio G no es descomponible [2] en el producto de otros dos, pues el estudio de una ecuación de la forma

$$G_1(z,w) \cdot G_2(z,w) = 0$$

puede ser sustituído enteramente por el separado de las ecuaciones $G_1 = 0$ y $G_2 = 0$.

Si suponemos ahora sustituído en lugar de z un valor determinado, z_0, tendremos una ecuación numérica en w, que, en general, tiene m raíces $w_0^{(1)}, w_0^{(2)}, \ldots, w_0^{(m)}$. Sólo se exceptúan los casos en que:

a) $g_m(z_0) = 0$, porque entonces se rebaja el grado de la ecuación, y

b) $G(z_0,w) = 0$ tenga raíces múltiples.

Es sabido, del Algebra, que este último caso sólo se presenta cuando existe una relación determinada entre los coeficientes, a saber, la anulación del llamado *discriminante* de la ecuación, que es una expresión racional y entera de los coeficientes de ésta; y además que este discriminante, que designaremos por $D(z)$, no se anula idénticamente cuando se supone $G(z,w)$ irreducible, sino que, por tanto, es una función racional entera de grado determinado. Las dos excepciones a) y b) se presentan, pues, en todo caso, *sólo para un número finito de valores de z*, que designaremos por $a_1, a_2, \ldots a_r$, y de los cuales, como «puntos críticos», prescindiremos por ahora. Entonces podremos decir: Para todo punto $z = z_0$, la ecuación $G(z_0, w) = 0$ tiene siempre m raíces distintas $w_0^{(1)}, \ldots, w_0^{(m)}$, que asociaremos al punto z_0 como base, y nuestra cuestión queda resuelta con el

Teorema: El conjunto m-ple de valores que la ecuación $G(z, w) = 0$ hace corresponder a los puntos del plano («punteado» con la exclusión de los a_λ) es el de una única función analítica m-forme $w = F(z)$; o, en términos más breves: La ecuación $G(z, w) = 0$ define una función $w = F(z)$, m-forme y analítica en todo el plano punteado.

Las funciones que admiten una definición de esta especie, son las designadas con el nombre de **funciones algebraicas**.

Este teorema, que constituye el fundamento de la teoría de las funciones algebraicas, será demostrado en los dos artículos siguientes, en los que, además, examinaremos el comportamiento de $F(z)$ en los puntos críticos, entre los cuales contaremos también el punto ∞.

(1) Un ejemplo muy sencillo de ecuación que define más de una función es $w^2 - z^2 = 0$, la que da, evidentemente, dos funciones.

(2) Este concepto tiene el carácter de absoluto cuando se trata de *dos* variables, pero en el caso de *una*, sólo tiene sentido cuando se fija el carácter numérico de los coeficientes.

§ 14. Carácter analítico de las raíces en pequeño

Sea z_0 un punto del que, por ahora, sólo suponemos que es $g_m(z_0) \neq 0$. Entonces $G(z_0, w) = 0$ tiene siempre m raíces, entre las cuales puede haberlas múltiples. Si w_0 es una de estas raíces α-ple ($1 \leq \alpha \leq m$), se verifica el siguiente

Teorema de la continuidad de las raíces: Si haciendo centro en w_0 se describe un círculo, K_ε, de radio suficientemente pequeño, $\varepsilon > 0$, se puede siempre trazar un círculo, K_δ, de centro z_0 y radio $\delta = \delta(\varepsilon)$ suficientemente pequeño para que para todo $z = z_1$ de K_δ la ecuación $G(z_1, w) = 0$ tenga α *raíces diferentes*, todas contenidas en K_ε [1].

(1) Este teorema explica claramente la multiplicidad de una raíz, pues dice que una raíz α-ple se *descompone* en α raíces diferentes cuando se hacen variar un poco los coeficientes de la ecuación.

Demostración: Poniendo $w = (w - w_0) + w_0$ y ordenando por las potencias de $w - w_0$, se puede escribir:

$$G(z, w) = \bar{g}_0(z) + \bar{g}_1(z)\cdot(w - w_0) + \ldots + \bar{g}_m(z)\cdot(w - w_0)^m$$

y los nuevos coeficientes son:

$$\bar{g}_0(z_0) = \bar{g}_1(z_0) = \ldots = \bar{g}_{\alpha-1}(z_0) = 0, \quad \bar{g}_\alpha(z_0) \neq 0.$$

Por consiguiente, se puede suponer trazado, desde luego, un círculo $K_{\delta'}$ de centro z_0 y radio suficientemente pequeño, δ', para que en $K_{\delta'}$ y su circunferencia (aparte el centro z_0 en el caso de ser $\alpha > 1$) siempre sean $D(z)$ y $\bar{g}_\alpha(z)$ diferentes de 0. Entonces ponemos

$$G(z, w) = \bar{g}_\alpha(z)\cdot(w - w_0)^\alpha\cdot[1 + A + B],$$

donde A y B representan [1] las siguientes expresiones:

$$A = A(z, w) = \frac{\bar{g}_{\alpha+1}}{\bar{g}_\alpha}\cdot(w - w_0) + \ldots + \frac{\bar{g}_m}{\bar{g}_\alpha}(w - w_0)^{m-\alpha}$$

$$B = B(z, w) = \frac{\bar{g}_{\alpha+1}}{\bar{g}_\alpha}\cdot\frac{1}{w - w_0} + \ldots + \frac{\bar{g}_0}{\bar{g}_\alpha}\cdot\frac{1}{(w - w_0)^\alpha}.$$

Sean $c > 0$ el extremo inferior de $|\bar{g}_\alpha(z)|$ para todos los z de $K_{\delta'}$ (este extremo es positivo, puesto que $\bar{g}_\alpha(z)$ no puede anularse en $K_{\delta'}$, *incluído su contorno*) y M una cota superior para todos los $|g_\lambda(z)|$ en $K_{\delta'}$. Entonces, para cualquier ε tal que $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, para todos los z de $K_{\delta'}$, y todos los w del círculo K_ε de centro w_0 y radio ε, es

$$|A| < \frac{M\cdot\varepsilon}{c}(1 + \varepsilon + \ldots + \varepsilon^{m-\alpha-1}) < 2\frac{M}{c}\cdot\varepsilon.$$

[1] Se ve claramente cómo debe entenderse esto cuando son $\alpha = 1$ ó $\alpha = m$.

Imaginemos ahora para ε un valor cualquiera, pero menor que $\frac{c}{4M}$ y fijo para cuanto sigue; entonces, para todos los z de $K_{\delta'}$ y todos los w de K_ε, será siempre:

$$|A| = |A(z, w)| < \tfrac{1}{2}.$$

Tomamos ahora $\delta < \delta'$ tan pequeño que en el círculo K_δ de centro z_0 y radio δ todos los valores absolutos

$$|\bar{g}_0(z)|, \quad |\bar{g}_1(z)|, \ldots, \quad |\bar{g}_{\alpha-1}(z)|$$

se conserven menores que el número, ahora fijo,

$$\mu = \frac{c}{2\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon^2} + \ldots + \frac{1}{\varepsilon^\alpha}\right)},$$

cosa posible, porque todos estos coeficientes se anulan en el punto z_0. Entonces, para todos los z en K_δ y todos los w en el *contorno* de K_ε, es decir, para todo z y todo w tales que sea

$$|z - z_0| \leq \delta \quad \text{y} \quad |w - w_0| \overset{\text{(sic!}}{=} \varepsilon$$

siempre es

$$|B| = |B(z, w)| < \mu\cdot\frac{1}{c}\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon^2} + \ldots + \frac{1}{\varepsilon^\alpha}\right) = \tfrac{1}{2}.$$

Para los círculos así determinados K_δ y K_ε se verifica el teorema, pues si z_1 es un punto cualquiera de K_δ, para todo w *de la circunferencia* de K_ε es

$$|\bar{g}_\alpha(z_1)\cdot(w - w_0)^\alpha| > |\bar{g}_\alpha(z_1)\cdot(w - w_0)^\alpha(A(z_1, w) + B(z_1, w))|,$$

puesto que en él A y B tienen valores absolutos menores que $\frac{1}{2}$. Aplicando, pues, el teorema de la pág. 255 a las fun-

ciones de w, aquí constituídas por valores absolutos, y a la circunferencia K_ε, vemos que $G(z_1, w)$ tiene en el círculo K_ε el mismo número de ceros que la función $\bar{g}_\alpha(z_1)\cdot(w - w_0)^\alpha$, que figura en el primer miembro de la última desigualdad, es decir, *precisamente*, α *ceros;* y éstos son diferentes, puesto que en z_1, que también está en $K_{\delta'}$, es $D(z)_1 \neq 0$.

Vamos a suponer ahora, además, que también sea $D(z_0) \neq 0$ y, por tanto, $\alpha = 1$. Entonces, para todo $z = z_1$ de K_δ hay *una raíz, y sólo una*, de $G(z, w) = 0$ en K_ε; luego esta raíz es una función uniforme y continua, $f_1(z)$, de z. Para ella se verifica el

Teorema de la derivabilidad de las raíces: *La raíz $w = f(z)$ es una función de z, analítica en K_δ.*

Demostración: Sea z_1 un punto cualquiera interior a K_δ y $z_1 + \zeta$ otro punto, próximo al z_1, también interior a K_δ. Si son $f_1(z_1) = w_1$ y $f_1(z_1 + \zeta) = w_1 + \omega$, serán, pues, $G(z_1, w_1) = 0$, $G(z_1 + \zeta, w_1 + \omega) = 0$ y, por la continuidad de $f_1(z)$, cuando $\zeta \to 0$ también $\omega \to 0$. El teorema que tratamos de demostrar expresa simplemente que existe el

$$\lim_{\zeta \to 0} \frac{f_1(z_1 + \zeta) - f_1(z_1)}{\zeta} = \lim_{\zeta \to 0} \frac{\omega}{\zeta}.$$

Ahora bien, ordenando por las potencias de ζ y ω, representando, como de ordinario, por $G'_z(z_1, w_1)$ y $G'_w(z_1, w_1)$ las derivadas parciales respecto a z y w, respectivamente, de $G(z, w)$ en el punto (z_1, w_1) es

$$G(z_1 + \zeta, w_1 + \omega) = G(z_1, w_1) + \zeta\cdot G'_z(z_1, w_1) + \omega\cdot G'_w(z_1, w_1) +$$

términos que contienen uno, por lo menos, de los factores ζ^2, $\zeta\omega$ y ω^2. Como el primer miembro y el primer término del segundo son nulos, podemos poner

$$0 = \zeta[G'_z(z_1, w_1) + P\cdot\zeta + Q\cdot\omega] + \omega[G'_w(z_1, w_1) + R\cdot\omega],$$

designando por P, Q, R ciertas funciones enteras racionales de ζ y ω. En esta expresión, como w_1 tiene que ser raíz simple de $G(z_1, w) = 0$, seguramente es $G'_w(z_1, w_1) \neq 0$ y, por consiguiente, podemos imaginar ζ y con él, también, ω tan pequeños que sea $|R\cdot\omega| < |G'_w(z_1, w_1)|$, y entonces el segundo paréntesis cuadrado de la ecuación última es $\neq 0$; de donde se sigue inmediatamente que existe

$$f'_1(z_1) = \lim_{\zeta \to 0} \frac{\omega}{\zeta} \quad \text{y es} \quad = -\frac{G'_z(z_1, w_1)}{G'_w(z_1, w_1)},$$

lo cual demuestra el teorema.

§ 15. La función algebraica

Los teoremas del artículo anterior han conducido a este resultado : A todo punto, z_0, no crítico, del plano le corresponden m valores diferentes, que en todo círculo suficientemente pequeño de centro z_0 — lo que abreviadamente se expresa con la locución « en pequeño » — se condensan en m elementos de función uniformes y analíticos, completamente separados, que vamos a designar por

$$f_1(z; z_0),\ f_2(z; z_0),\ \ldots,\ f_m(z; z_0)$$

y podemos suponer representados por series de potencias correspondientes al centro z_0. Nos queda, pues, por demostrar que todos estos elementos pertenecen a una misma función analítica m-forme.

1.° Se ve, desde luego, que cada uno de los elementos puede ser prolongado sin inconveniente en el plano punteado. Así, si K_0 es un círculo cualquiera en el que uno de los elementos considerados, por ejemplo, el $f_1(z; z_0)$, es analítico, y z_1 es un punto no crítico de la circunferencia de K_0, la unifor-

midad de la función en pequeño hace que uno de los elementos $f_\mu(z; z_1)$, $(\mu = 1, 2, \ldots, m)$ coincida con $f_1(z; z_0)$ en la parte del entorno de z_1 situada en el interior de K_0, lo cual demuestra la posibilidad de la prolongación de este último elemento.

2.° Imaginemos ahora una línea quebrada L que no se corte a sí misma y una los puntos críticos $a_1, a_2, \ldots, a_m$ entre sí y con el punto ∞, y supongamos cortado el plano a lo largo de esta línea L (fig. 15). Entonces se puede prolongar cada uno de los elementos $f_\mu(z; z_0)$, sin inconveniente, en el plano cortado—designaremos por E' el recinto simplemente conexo resultante —. Cada elemento engendra así una *función uniforme* y *analítica* (1) en E'; las representaremos por $F_1(z)$, $F_2(z), \ldots,$ $F_m(z)$. Estas condensan, pues, « en grande » todo el conjunto m-ple de los valores cuyas bases son los puntos de E', en m funciones separadas, uniformes y analíticas en E'; y todo lo que nos queda por probar es que estas m funciones conducen unas a otras al prolongarlas a través del borde L de E'; en suma, que son las m ramas de la misma función analítica. Para ello examinemos:

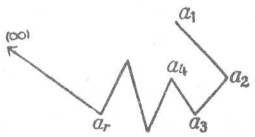

Fig. 15

3.° El comportamiento de las funciones en los puntos críticos y en el ∞. Sea a uno de los puntos críticos, K un contorno que le rodea sin encerrar ni contener ningún otro punto crítico, y z_0 un punto del mismo. Entonces cada uno de los m elementos $f_\mu(z; z_0)$ puede prolongarse a lo largo de K (por ejemplo, en sentido positivo). Al volver al punto z_0, la uniformidad en pequeño hace que cada uno de estos elementos conduzca a uno determinado (pero

(1) Aunque sin enunciarlo, utilizamos aquí el siguiente **teorema**: Dado un recinto simplemente conexo y un elemento de función, analítico en el entorno de un punto del recinto y que puede prolongarse sin inconveniente en él, esta prolongación engendra una función uniforme y analítica en el recinto. La demostración puede hacerla fácilmente por sí mismo el lector. (Véase también *C. Jordan*, Cours d'Analyse, I, § 346.)

en general otro) y, naturalmente, nunca dos diferentes al mismo, puesto que, en caso contrario, la prolongación inversa de aquel último elemento conduciría a otros dos diferentes. Los m elementos sufren, pues, dicho brevemente, una permutación. Supondremos la numeración de manera que f_1 conduzca a f_2, f_2 a $f_3, \ldots, f_{p-1}$ a f_p y éste nuevamente a f_1, $(1 \leq p \leq m)$, de modo, pues, que los primeros p elementos constituyan un ciclo (1), $f_1(z; z_0)$ y, por tanto, también $F_1(z)$ al cabo de p prolongaciones alrededor de a conduce de nuevo a ella misma; luego, si ponemos

$$(z - a) = (z')^p \quad \text{y} \quad F_1(z) = F_1(z'^p + a) + \varphi_1(z'),$$

es $\varphi_1(z')$ en el entorno de $z' = 0$, aparte este punto, no sólo *analítica*, sino también *uniforme*. Pues si la variable z' efectúa un giro completo alrededor del origen (es decir, su argumento crece en 2π de un modo continuo) también $(z')^p$ gira alrededor del origen 0, por consiguiente, gira el punto z alrededor de a, precisamente p *veces*, puesto que el argumento de $z - a$ viene aumentado en $2p\pi$. Por lo tanto, $\varphi_1(z')$ puede ser desarrollada, para el entorno del punto 0, en una serie de Laurent:

$$\varphi_1(z') = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z'^n,$$

de modo que $F_1(z)$ admite (2), para el entorno del punto crítico a, un desarrollo de la forma

(1) Si m objetos de una permutación pueden sustituirse entre sí de esta manera *cíclica*, se dice que forman un *ciclo*, y se verifica este sencillo **teorema**: *Toda sustitución puede descomponerse en ciclos*. Por ejemplo, si se ha de pasar de 1 2 3 4 5 6 7 8 9 a 3 7 5 4 1 8 9 6 2, las cifras 1, 3, 5 y las 2, 7, 6 forman ciclos de tres términos cada una; las 6 y 8 un ciclo de dos términos; y la 4 constituye por sí sola un ciclo.

(2) Se ve fácilmente que éste representa un desarrollo de las p funciones $F_1, F_2, \ldots, F_p$ del ciclo de p términos, poniendo en lugar de $\sqrt[p]{z - a}$ sus p determinaciones. Sin embargo, no haremos uso de esta observación.

$$F_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \left(\sqrt[p]{z-a}\right)^n.$$

Ahora decimos, además, que:

En este desarrollo sólo hay un número finito de términos con potencias de exponente negativo.

Demostración: Si es $g_m(a) \neq 0$ y, por consiguiente, $G(a, w) = 0$ tiene m raíces, entre las cuales puede haber múltiples, el teorema de la continuidad de las raíces dice que éstas también son continuas en el punto a; luego no puede haber en los desarrollos anteriores ninguna potencia de exponente negativo.

Pero si es $g_m(a) = 0$, supongamos que de orden q, tendremos que proceder de otra manera. Podemos poner entonces $g_m(z) = (z-a)^q \cdot h_m(z)$ siendo $h_m(a) \neq 0$. Formemos el producto

$$\Psi(z) = (z-a)^{q(m-1)} \cdot G(z, w),$$

y se ve en seguida que, llamando $(z-a)^q \cdot w = v$, puede ser escrito en la forma

$$\Psi(z, v) = h_0(z) + h_1(z) \cdot v + \ldots + h_m(z) \cdot v^m,$$

designando por $h_0, h_1, \ldots, h_{m-1}$ funciones apropiadas enteras y racionales de z. Ahora bien, la ecuación $\Psi(z, v) = 0$ es evidentemente irreducible y para sus coeficientes más elevados es $h_m(a) \neq 0$; luego las raíces de esta nueva ecuación son continuas para $z = a$ y permiten, como en el caso antes considerado, $g_m(a) \neq 0$, un desarrollo de la forma de que se trata, pero en el que no hay ningún término con exponente negativo. De aquí resulta inmediatamente, por ser

$$w = (z-a)^{-q} \cdot v,$$

que también las raíces de la ecuación dada y, por tanto, las funciones $F_\mu(z)$ admiten en el entorno del punto crítico

Manuel Alberto del Castillo

$z = a$ un desarrollo de la misma forma, en el que hay, *a lo más, un número finito* (a saber, a lo más, $p \cdot q$) de potencias de exponente negativo, como se quería demostrar.

Para el punto $z = \infty$ se procede de modo análogo: basta poner en todas partes $\frac{1}{z}$ en lugar de $z - a$ y tomar una circunferencia suficientemente grande, K, como contorno que encierra al punto ∞. Con este pequeño artificio, cuyas particularidades se advierten sin esfuerzo, se demuestra entonces que cada una de las funciones $F_\mu(z)$ permite, para el entorno del punto ∞, un desarrollo de la forma

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \left(\sqrt[p]{\frac{1}{z}}\right)^n, \qquad (1 \leq p \leq m),$$

en el que, a lo más, sólo puede haber un número finito de potencias de la raíz p-sima con exponente negativo.

Los puntos críticos, a los que agregamos el ∞, son, pues, singularidades de especie muy sencilla. Para ellas ponemos la siguiente

Definición: Se dice que un punto a es un *punto algebraico* de una función analítica si en el entorno del punto a (propio o del ∞), prescindiendo de este mismo punto a, la función se comporta como *regular*, aunque no necesariamente *uniforme*, y admite un desarrollo de la forma

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \left(\sqrt[p]{z-a}\right)^n \quad \text{o} \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \left(\sqrt[p]{\frac{1}{z}}\right)^n,$$

respectivamente, en el que sólo existe un *número finito* de términos con potencias de exponente negativo, de la raíz p-sima [1]. También se dice que la función tiene en aquel punto el *carácter* de algebraica.

[1] Si fuese $p = 1$ se trataría de un polo ordinario; si, además, no hubiera *ninguna* potencia de exponente negativo, el punto sería regular. Naturalmente sólo se habla de una *singularidad algebraica* cuando no se presenta este último caso.

4.° Ahora ya podemos terminar la demostración, probando que cada una de las m funciones $F_\mu(z)$ puede conducir a cada una de las otras por prolongación adecuada hecha a través del corte L. Basta para ello, naturalmente, hacer ver que se puede pasar de F_1 a cualquiera otra, F_μ, pues si se pasa de F_1 a F_μ y a F_ν, por medio de la prolongación inversa se pasa de F_μ a F_1 y después de F_1 a F_ν; luego, en todo caso, de F_μ a F_ν. Imaginemos ahora que *no* se pudiera pasar de F_1 a cualquiera otra F_μ y numeremos estas funciones de manera que de la F_1 se pueda pasar a las $F_2, F_3, \ldots, F_k$ $(k < m)$, pero no a las $F_{k+1}, \ldots, F_m$. Esto querría decir que en cualquier prolongación en el plano punteado, las k primeras funciones sólo se *permutarían entre sí* y nunca se pasaría de una de ellas a otra de las restantes. Formando, pues, una función *simétrica* de las mismas $S(F_1, F_2, \ldots, F_k) = \Phi(z)$, ésta no experimentaría variación alguna y, por tanto, sería uniforme y analítica en el plano punteado. Para el entorno de los puntos críticos (incluso el ∞) podría, en consecuencia, ser desarrollada en una serie ordinaria de Laurent, que, según lo dicho antes, no podría tener más que un *número finito* de términos con exponente negativo; pero esto indicaría que $\Phi(z)$ no podría tener en todo el plano (incluyendo el ∞) ninguna otra singularidad que, a lo más, polos y, por consiguiente (I, § 36, teorema 2.°), sería una función *racional* de z. En particular, la ecuación

$$(w - F_1)(w - F_2)\ldots(w - F_k) = \varphi_0(z) + \varphi_1(z)\cdot w + \ldots + \varphi_k(z)\cdot w^k = 0,$$

tendría todos los coeficientes $\varphi_\lambda(z)$ funciones racionales de z y multiplicándola por el mínimo común múltiplo de los denominadores de sus coeficientes, se obtendría una ecuación de la forma

$$g(z, w) = \gamma_0(z) + \gamma_1(z)\cdot w + \ldots + \gamma_k(z)\cdot w^k = 0,$$

con coeficientes *racionales enteros*, por consiguiente, una ecuación algebraica que se satisfaría por cada una de las funciones $F_1, F_2, \ldots, F_k$, lo cual es imposible para $k < m$, por haber partido de la hipótesis de ser irreducible $G(z,w)$ [1].

Con esto queda demostrado en todas sus partes el teorema enunciado al final del § 13, y, además, este otro:

Teorema: Una función algebraica no tiene en todo el plano (incluído el ∞) otras singularidades que las algebraicas.

5.° Ahora ya es cosa fácil construir la superficie de Riemann correspondiente a la función algebraica definida por la ecuación $G(z, w) = 0$. Tomemos m hojas, todas ellas cortadas a lo largo de L, correspondientes a las funciones $F_\mu(z)$ y cuyos puntos son bases de los valores de las funciones respectivas $F_1, F_2, \ldots, F_m$. Prolongando una de estas funciones a través de uno de los lados del corte, L, que une dos puntos críticos sucesivos, cada una de las funciones F_μ conduce a una determinada de ellas. De esta manera, completamente determinada, se unen entre sí las m hojas a lo largo del segmento del corte considerado [2], con lo cual este segmento del corte desaparece.

Procediendo del mismo modo con todos los demás lados del corte (incluso con el que se extiende hasta el ∞) desaparecen todos los bordes y queda terminada toda la superficie de Riemann de la función algebraica definida por la ecuación $G(z,w) = 0$. Aparece aún más clara su condición de cerrada y desaparece el papel de excepción del punto ∞ si se parte de la esfera en lugar de considerar el plano. Entonces se obtiene una esfera de Riemann cerrada de m hojas, sobre la que cada punto no crítico es base de un valor de la función, y sólo de uno.

[1] Pues se verifica el teorema, puramente algebraico: Si la ecuación $g(z,w) = 0$ y la *irreducible* $G(z, w) = 0$ tienen una raíz común para todos los puntos z de un recinto, $g(z; w)$ es divisible por $G(z, w)$; luego el grado de g respecto a w es, *por lo menos*, el mismo de G.

[2] Algunas hojas pueden comportarse como «lisas», lo cual ocurrirá cuando la función que se prolonga se transforme en sí misma.

Por último, se hace que los puntos críticos sean también bases de valores de la función, del siguiente modo: Cuando se prolonga alrededor de un punto crítico a (que también puede ser el ∞), vimos que todas las funciones sufren una sustitución determinada, que se descompone en un cierto número l, $(1 \leq l \leq m)$ de ciclos. Entonces el punto a se cuenta sólo l veces (no m), de manera que para todas las hojas que corresponden a un ciclo se le cuenta una sola vez y a cada uno de estos l puntos a superpuestos se le hace base del valor c_0 o del ∞, según que *el desarrollo que le corresponde*, obtenido en el párrafo 3.°, comience por el término constante c_0, o realmente tenga potencias de exponente negativo [1].

Una vez ampliado el conjunto de valores de la función de esta manera, se dice que el conjunto de todos los pares de valores (z, w) formados por todos los puntos de la esfera de Riemann, como primera componente, y de los valores correspondientes de la función, como segunda componente, forman la **figura algebraica** *definida por la ecuación* $G(z, w) = 0$. El estudio de estas figuras es el objeto de la teoría de las funciones algebraicas.

Problemas: 1.° Demostrar el teorema formulado en la nota al pie de la página 268.

2.° Explicar con todas sus particularidades la construcción de las superficies de Riemann de las funciones algebraicas, w, de la variable z, definidas por las ecuaciones:

$$\text{(a)} \quad w^3 - 1 - z = 0,$$

$$\text{(b)} \quad w^3 - 3w - z = 0,$$

$$\text{(c)} \quad w + \frac{1}{w} - z = 0$$

(puntos críticos, unión de las hojas en los mismos; comportamiento de la función en ellos; distribución del conjunto de valores; etc.).

[1] Si los l ciclos de la serie son de $p_1, p_2, \ldots, p_l$ términos, respectivamente, en a hay l puntos de ramificación de $p_1, p_2, \ldots, p_l$ hojas (entre los cuales, por consiguiente, también puede haberlos de una hoja, es decir, ordinarios); y estos l puntos diferentes de la superficie, contados como puntos de ramificación, pueden, naturalmente, ser bases de diferentes valores de la función.

CAPÍTULO VI

LA FIGURA ANALÍTICA

§ 16. La función analítica monógena

Ahora estamos ya en condiciones de acabar la definición de función analítica completa dada en I, pág. 124, que, como dijimos, aun tenía algunas lagunas, y con ello terminar esta exposición en lo que al concepto fundamental se refiere, al de función analítica. Para ello, volvamos a las consideraciones interrumpidas en el § 10.

Partíamos allí de un elemento de función dado — por ejemplo, de una serie de potencias — y lo prolongábamos mientras esto era posible. Vamos a ver ahora con más precisión la manera de proceder, siquiera sólo sea de un modo puramente teórico, ya que serán precisas, en general, infinitas series de potencias antes de que una nueva prolongación no dé nada nuevo. La condición que es necesario exigir a todo proceso infinito, aunque sólo tenga un sentido abstracto, es que cada una de las operaciones de que se compone esté formada por un *número finito de* operaciones auxiliares; o, en otros términos, que se componga de una *sucesión numerable* de operaciones. Pero no es éste el caso de ahora, pues parece que se necesitaría, aunque se hubieran agotado todas las posibilidades de prolongación de la primera serie de potencias, agregar un nuevo desarrollo para

cada punto de su círculo de convergencia, y esto daría lugar a un conjunto *no numerable* de series de potencias.

Sin embargo, es fácil convencerse de que en un proceso de prolongación —tal, por ejemplo, como el de prolongar una serie de potencias $\mathcal{P}_0$, dada para el centro z_0, a lo largo de la trayectoria L hasta ζ —sólo se necesita hacer uso de las nuevas series de potencias cuyos centros sean puntos de *coordenadas racionales* (1). Pues si siempre fuese posible la prolongación a lo largo de L, los círculos de convergencia necesarios, de centros $z_0, z_1, \ldots, z_{m-1}, z_m = \zeta$ (I, pág. 107 y figura 5) cubrirían un recinto entre cuyo contorno y la trayectoria L habría una distancia positiva ρ; y si ahora se hace uso de los puntos *racionales* $z'_1, z'_2, \ldots$ que a lo más disten $\frac{1}{2}\rho$ de L, en lugar de los $z_1, z_2, \ldots$, se llega evidentemente también a ζ y con el mismo elemento de función.

Pero los puntos racionales forman un conjunto numerable; luego el proceso total de prolongación de un elemento de función puede ser realizado por un conjunto numerable de operaciones, pues partiendo de la serie de potencias dada, $\mathcal{P}_0$, si únicamente se consideran los puntos racionales de su círculo de convergencia como centros de nuevos desarrollos, sólo se obtiene un conjunto numerable de series de potencias, tales como las

$$\mathcal{P}_{01}, \mathcal{P}_{02}, \ldots, \mathcal{P}_{0n}, \ldots,$$

de cada una de las cuales sólo sale a su vez otro conjunto numerable de nuevas series de potencias (2), como las

$$\mathcal{P}_{11}, \mathcal{P}_{12}, \ldots, \mathcal{P}_{1n}, \ldots$$

y así sucesivamente; de modo que de cada vez tenemos un

(1) Llamaremos a éstos *puntos racionales*.

(2) En I, pág. 15, se vió ya en el ejemplo de los puntos reticulares del plano, que un conjunto infinito numerable de objetos, cada uno de los cuales está formado por un conjunto infinito numerable de entes, forma un conjunto numerable.

conjunto numerable de sucesiones de conjuntos numerables de series de potencias, y, por consiguiente, en suma, un conjunto numerable de series de potencias, que podemos designar por

$$\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots, \mathcal{P}_k, \ldots$$

Con esto tenemos ya el

Teorema 1.°: Todo punto, z, que, de algún modo, mediante prolongación del elemento de partida, $\mathcal{P}_0$, puede ser incluído en el interior de un círculo de convergencia de una nueva serie de potencias, puede serlo utilizando exclusivamente un *número finito* de series de potencias de una sucesión adecuada $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots, \mathcal{P}_k, \ldots$ de éstas.

Cuando procediendo de esta manera se han agotado todas las posibilidades de prolongación de un elemento de función dado, $w = f(z)$, el resultado es que el entorno de cada punto, z_0, del plano que aparece una vez dentro del círculo de convergencia de la $\mathcal{P}_k$, se cubre por un número finito o infinito numerable de valores de la función, de tal manera que cada cubrimiento forma una función uniforme y regular en el entorno de z_0. Sean estas funciones las

$$f_1(z; z_0), f_2(z; z_0), \ldots$$

y hagamos al punto z_0 base de los valores de estas funciones en $z = z_0$, que designaremos por $w_0^{(1)}, w_0^{(2)}, \ldots$, debiendo, cuando aparezca varias veces el mismo valor, asignárselo otras tantas a z_0. Consideremos, por último, los pares de números

$$(z_0, w_0^{(1)}), (z_0, w_0^{(2)}), \ldots$$

formados para *cada* punto z_0 que, por lo menos, pertenezca a uno de los círculos de convergencia de $\mathcal{P}_k$; el conjunto de todos estos pares de números constituye la **función analítica**

monógena *engendrada por el elemento de partida*. Esta función está, pues, dada por las siguientes condiciones:

1.° A todo punto z del plano, o de una parte del mismo, le corresponde un conjunto finito o infinito numerable de valores funcionales $w^{(1)}, w^{(2)}, \ldots$ (entre los cuales puede haberlos iguales).

2.° Si (z_0, w_0) es un determinado par de estos valores, *todos* los (z, w) cuyo primer componente pertenece a un entorno de z_0 pueden condensarse en un conjunto finito o infinito numerable de funciones $f_\nu(z; z_0)$ analíticas en z_0.

3.° Si $f_\nu(z; z_0)$ y $f_\mu(z; z_0)$ son dos cualesquiera de las funciones así formadas, cada una de ellas es una prolongación (naturalmente, no *inmediata*) de la otra.

4.° Si se desarrolla uno cualquiera de estos elementos de función $f_\nu(z; z_0)$ para un punto racional como centro, se obtiene una de las series de potencias $\mathcal{P}_k$.

Podemos, según esto, enunciar los dos siguientes teoremas:

Teorema 2.°: Todo conjunto de valores dado en pequeño [1], *cualquiera que sea*, engendra *siempre* una función analítica monógena completamente determinada.

Teorema 3.°: El conjunto de los valores que una función multiforme puede tener en un punto z es finito o infinito numerable.

§ 17. La superficie de Riemann

La construcción de la superficie de Riemann correspondiente a una función analítica monógena, según el procedimiento indicado en el § 10, no ofrece ya dificultad: con arreglo a lo allí dicho, se irán pegando los discos relativos a los

[1] Es decir, todo cubrimiento de un recinto, por pequeño que sea (o simplemente un trocito de línea o un conjunto infinito de puntos acotado), del plano z con valores w. (Acerca de esto, véase lo dicho en I, pág. 116.)

círculos de convergencia de la sucesión de las $\mathcal{P}_k$ — atravesando (idealmente) las capas intermedias, cuando sea preciso — y así se obtendrá la superficie buscada [1].

Las relaciones de conexión *pueden*, naturalmente, ser muy complicadas. Pero también *puede* suceder, como se ha visto en los ejemplos de los capítulos IV y V, que sean muy claras y sencillas. Como la superficie de Riemann no es en sí misma un fin, sino simplemente un medio auxiliar de representación, se prescinde de ella en los casos en que su consideración es tan poco sencilla que sería más difícil seguir la marcha de los valores de la función sobre la superficie que atendiendo sólo a la función misma. Así, p. ej., la ventaja de construir la superficie correspondiente a la función $w = \text{arc sen } z$ para ver intuitivamente la marcha de los valores de ésta, sería puramente nominal, a pesar de que la construcción sería muy fácil [2], teniendo en cuenta la fórmula $w = \text{arc sen } z = -i \log (iz + \sqrt{1 - z^2})$ que se deduce de la $z = \text{sen } w = -\frac{1}{2} i (e^{iw} - e^{-iw})$, resolviendo respecto a w, y si se trata de estudiar la inversa de la función σ de Weierstrass o de la $\wp$, la construcción de la superficie correspondiente apenas ofrecería ventaja alguna.

Por esto no se recomienda acudir en todos los casos a la formación de la superficie de Riemann, sino que en cada uno debe verse si su construcción facilita o no la intuición. En los dos capítulos anteriores hemos visto los casos más importantes de superficies utilizables. Para el caso general basta saber que, dada una función, siempre se puede construir una superficie de Riemann sobre la cual los valores de la función son funciones *uniformes* del punto, en la que,

[1] En lugar de los discos circulares se pueden tomar, evidentemente, otros recintos cualesquiera y, en particular, escoger *los mayores posibles* en que una rama de la función se comporte analíticamente. Así, por ejemplo, en el caso de las funciones algebraicas, se podía tomar todo el plano cortado.

[2] Para ejercitarse en esta representación conviene, a pesar de lo dicho, construir idealmente esta superficie.

por consiguiente, cada punto está cubierto por tantas hojas (en conjunto finito o infinito numerable) como elementos diferentes existen para el entorno del punto, y, además, que estas hojas están ligadas entre sí de manera completamente determinada. Esto último quiere decir que si, partiendo de un punto determinado de una hoja determinada, se describe una trayectoria cualquiera determinada (en términos más precisos, una trayectoria cuya proyección sobre el plano z ordinario es conocida), su marcha sobre la superficie queda completamente determinada y conduce, por tanto, a un punto completamente determinado de una hoja igualmente bien determinada — siempre que el punto no se salga de la superficie, es decir, evite los puntos frontera singulares de los bordes de las hojas en que se mueve (véase más adelante).

Ahora estamos ya en condiciones de precisar completamente algunos conceptos de que hemos hecho frecuente uso:

1.° Se obtiene una **hoja** de la superficie de Riemann cuando, partiendo de cualquiera de los discos circulares de que hemos hablado, se han ido pegando nuevos discos (o partes de discos) hasta que se llega a un cubrimiento múltiple del plano, pero sólo hasta ese momento. El concepto de hoja, como claramente se desprende de esto, no es absoluto, sino que depende de la manera de realizar la construcción antedicha. Sin embargo, tiene un sentido completamente determinado hablar de hojas diferentes, en las que está un punto particular z_0; este punto z_0 pertenece a tantas hojas diferentes como discos circulares diferentes (es decir, no pegados en z_0 y su entorno) lo contienen. El conjunto de los puntos, z, que pertenecen a una misma hoja forma un recinto, según la significación dada a esta palabra en I, § 7.

2.° Se llama **rama** de una función $F(z)$ analítica (multiforme) dada toda función caracterizada por una hoja de la superficie de Riemann correspondiente a la primera y

analítica y uniforme en ella (en el recinto correspondiente, según 1.°).

3.° Se llama **elemento de función** de una función analítica, $f(z)$, la representación de una cualquiera de sus ramas, o de una parte de rama; en particular, pues, cada una de las series potenciales $\mathcal{P}_k$ y cada una de las funciones $f_\nu(z; z_0)$ utilizadas en el § 16 — en las cuales se puede suponer limitado de maneras muy diversas el entorno de z_0 que para ellas se considera.

4.° El **concepto de punto singular**, como el de hoja o rama, tampoco es absoluto: un punto determinado solo puede ser calificado de singular u ordinario siempre para una rama o una hoja determinada (véase el ejemplo de la pág. 244). Sin embargo, el concepto es totalmente determinado, pues el recinto constituído por todos los puntos pertenecientes a una hoja, según el apartado 1.°, está cubierto por un conjunto de valores que, según el apartado 2.°, forman una función analítica en aquel recinto — la rama correspondiente a esta hoja — y para ésta los puntos fronteras del recinto se descomponen (I, § 27) en ordinarios y singulares, es decir, en puntos para los cuales es prolongable la función más allá del borde y otros en los que no se puede prolongar.

Problemas: 1.° Explicar con todos sus pormenores la construcción de las superficies de Riemann (véase § 15, prob. 2.° c) correspondientes a las funciones: a) $w = z^a$ (a arbitrario complejo); b) $w = \operatorname{arc\,sen} z$.

2.° Formar una función que tenga por frontera natural el círculo unidad, pero que dentro de él sea

a) biforme;

b) infinitiforme.

§ 18. La figura analítica

Nos queda un último pequeño complemento (análogo al del final del § 15 para las funciones algebraicas) con el cual quede completamente acabada la idea de una función analítica completa.

Manuel Alberto del Castillo

Hasta ahora la cuestión estaba limitada a considerar el conjunto de los valores asociados al entorno de un punto (eo ipso: *interior*) de una hoja de la superficie de Riemann como un elemento de función ordinario en aquel entorno y considerar como no pertenecientes a la superficie todos los puntos singulares de las diferentes ramas (hojas). Ahora bien, entre estos puntos singulares hay algunos de naturaleza tan sencilla que —no sólo por éste, sino por otros motivos muy diversos—conviene incluirlos, por decirlo así, entre los ordinarios, y, en todo caso, contarlos como pertenecientes a la superficie. Estos son las singularidades algebraicas, por consiguiente, los siguientes puntos:

1.° *Los polos en una hoja*, es decir, todo punto aislado, z_0, del borde de una hoja, tal que el conjunto de los valores de la función asociados a su entorno puede desarrollarse en serie de Laurent (ordinaria) con un *número finito* de términos con potencias de exponente negativo [1]. Cada uno de tales puntos es considerado como base del valor ∞ y a los pares de números de la función analítica monógena se les agrega el par (z_0, ∞).

2.° *Los puntos de ramificación algebraicos*, es decir, todo punto singular del borde de una hoja, alrededor del cual se unen hojas en número finito, tal como $p(>1)$, de la misma manera que se unen en el origen en la superficie correspondiente a $\sqrt[p]{z}$, y para el cual se verifica la siguiente condición: el conjunto de valores asociado al entorno de z_0 sobre estas p hojas, que siempre (véase la pág. 269) puede ser desarrollado en una serie de la forma

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \left(\sqrt[p]{z-z_0}\right)^n$$

[1] En otra hoja puede z_0 ser punto ordinario o tener una singularidad de otra especie.

debe ser tal que no tenga ningún término con potencias de exponente negativo de $\sqrt[p]{z-z_0}$, o, si tiene algunos, que sean en número finito.

Cada uno de tales puntos se le cuenta como perteneciente a todas las p hojas, pero sólo *una vez en total*, y se le hace base del valor ∞ o del c_0, según que en el desarrollo haya o no potencias de exponente negativo; y en consecuencia, a los pares (z, w) se les agrega el (z_0, ∞) o el (z_0, c_0), respectivamente.

3.° Por último, en condiciones enteramente análogas, se agrega *el punto* ∞; en otros términos, si, *considerado en la esfera*, se comporta como el z_0 en los casos anteriores; por consiguiente, cuando

a) en el entorno del punto ∞ una hoja determinada es lisa [1] y el conjunto de valores asociado al entorno forma una función analítica uniforme, cuyo desarrollo en serie de Laurent correspondiente tiene, a lo más, un número finito con potencias de exponente negativo de $\left(\frac{1}{z}\right)$; o si

b) alrededor del punto ∞ se unen hojas en número finito, tal como $p(>1)$, de la misma manera que se unen en el punto ∞ en la superficie correspondiente a $\sqrt[p]{z}$, y si el desarrollo, siempre posible, del conjunto de valores asociados a aquel entorno

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \left(\sqrt[p]{\frac{1}{z}}\right)$$

tiene, a lo más, un *número finito* de términos con potencias de exponente negativo de $\sqrt[p]{\frac{1}{z}}$ [2].

[1] Es decir, la hoja contiene *todos* los puntos z exteriores a un cierto círculo.

[2] Los casos 1.° y 3.° a) pueden considerarse como particulares de 2.° y 3.° b) en que es $p = 1$.

En el caso a) se dice que el punto ∞ es ordinario, y en el b) que es de *ramificación de p hojas*. En ambos casos se le cuenta como perteneciente *una vez* a la superficie y se le hace base del valor ∞ o del c_0, según que haya o no potencias de exponente negativo en los desarrollos indicados; y a los pares (z, w) se les agrega el (∞, ∞) o el (∞, c_0), respectivamente.

El conjunto de los pares de números (z, w) así completados se dice que representa **la figura analítica (monógena)** definida por el elemento de partida [1].

Según esto, al conjunto de los elementos de función $f_\nu(z; z_0)$ se agrega ahora el finito o infinito numerable de los desarrollos de que se ha hablado en los apartados 1.°, 2.° y 3.° Se tiene entonces en el conjunto de todos estos elementos de función o de todos estos pares de números (z, w) en ordenación sencilla y completa, la *figura* que tiene su origen en un proceso de prolongación de una serie de potencias cualquiera dada o de una representación, válida en pequeño, de una función analítica.

Para terminar, permítasenos agregar todavía que la *teoría de la uniformización* citada en la nota al pie de la pág. 235 es, en cierto modo, el lazo de unión entre los dos objetos principales de nuestro estudio, las funciones uniformes y las funciones multiformes, pues en ella se demuestra el *teorema* de que *toda función analítica (multiforme), $w = F(z)$, puede quedar completamente representada por medio de funciones*

[1] Sin detenernos a demostrarla, agregaremos la observación de que la figura analítica (z, w) que resulta de un elemento de función $w = f(z)$, da origen a una nueva figura analítica monógena (w, z) cuando se cambian entre sí sus dos componentes; esta nueva figura se llama *inversa* de la primera. Este sencillo paso de una función analítica a su inversa no podría ser formulado de modo tan claro y simple sin los complementos que figuran en este artículo; y este solo hecho sería ya suficiente para justificar la conveniencia de su exposición.

uniformes (uniformizada), con lo cual se expresa que siempre existen dos funciones uniformes $z = z(t)$ y $w = w(t)$ que tienen la propiedad de que el par de números

$$(z, w) = (z(t), w(t))$$

da la función analítica $w = F(z)$, cuando la variable recorre un cierto recinto de su plano (teorema general de uniformización, de *Poincaré* y *Koebe*).

ÍNDICE ALFABÉTICO

Abel, 227 y 236.
Adición algebraica, 223.
Algebraica, adición, 223.
— curva, 235.
— figura, 274.
— función, 163 y 261 a 274.
— relación, 224.
— singularidad, 163 y 271.
Algebraicos, puntos, 271.
— — de ramificación, 282.
Analítica, figura, 275 a 285.
— prolongación, 242 y sigs.
Argumento, 37.
Asintótica, igualdad, 206.
Axioma de continuidad, 16.
Bolzano - Weierstrass (Teoría de), 22.
Borel-Heine (Teor. de), 32.
C, 192.
Cadena de círculos, 108.
Campo de continuidad, 123.
— de convergencia, 85.
— de definición, 37.
— de regularidad, 46 y 123.
— de variabilidad, 37.
Cassorati-Weierstrass (Teorías de), 133, 144 y 148.
Cauchy, criterio de convergencia de, 29.
Cauchy-Hadamard (Teor. de), 86
— (Integral de), 64.
— (Limitación de), 98.
— -Riemann (Ecuaciones diferenciales de), 46.
Ceros, 109.
Círculo de convergencia, 36.
— unidad, 12.
Clases, 16.
Cociente diferencial, 45.
Conexión simple, 35.
— múltiple, 76.
Conexo, 35.
Conforme, representación, 251.
Congruentes, puntos, 218.
Conjunto, 14.
— acotado, 19 y 27.
— cerrado, 32.
— numerable, 15.
— plano, 27.
Constante de Euler o de Mascheroni, 192.
Continuidad, 39.
— (Axioma de), 16.
— a lo largo de una línea, 41.
— (Campo de), 123.
— hacia adentro, 41.
— de las raíces, 263.
— uniforme, 41.
Convergencia absoluta, 173.
— (Campo de), 174.
— de productos infinitos, 171.
— factores generadores de, 181.
— uniforme, 90.
Cortadura, 17.
Cota superior, 19.
— inferior, 19.
Curva de Jordán, 34.
Curvas algebraicas, 235.
Dedekind (Cortadura de), 17.
Derivabilidad de las raíces de una ecuación, 266.
Derivada, 43.
— de una integral, 80.
— logarítmica, 177.
Desarrollo de Laurent, 136 y siguientes.
— de Taylor, 100 y sigs.
— en serie, 89.

Determinación de un logaritmo, 127.
Diferenciabilidad, 42.
Discriminante, 262.
Distancia, 11.
Doblemente periódicas (Funciones), 163, 217 y 225 a 232.
Dominio, 35.
Ecuación funcional de la función Γ, 204.
Ecuaciones diferenciales de Cauchy-Riemann. 46.
— — de Laplace, 47.
Elemento de función, 281.
Elementos de una función, 114.
— de un conjunto, 15.
Encaje de intervalos, 18.
— de recintos, 30.
Enteras (Funciones), 166.
Entorno, 12.
Esfera numérica, 13.
Estereográfica (Proyección o representación), 13.
Euler (Constante de), 192.
— (Función gamma de), 190 y 204 a 206.
— (Integral de), 191.
Extremo de acumulación, 22.
— inferior, 20.
— superior, 21.
Factores generadores de convergencia, 181.
Faja periódica, 218.
Figura algebraica, 274.
— analítica, 123 y 275 a 285.
— — monógena, 275 a 278.
Frontera, 17.
— natural, 122.
Función, 37.
— acotada, 131.
— analítica, 44.
— continua, 39.
— discontinua, 40.
— elemental, 38, 118, 119, 144, 145, 147.
— entera, 130 a 135.
— Γ de Euler, 190 y 204 a 206.
— exponencial, 118 y 147.
— multiforme, 125 y sigs.
— racional, 154 a 156.
— regular, 44.
— transcendente, 130.
Función uniforme, 44 y 125.
— $\wp$ de Weierstrass, 202, 203 y 229 a 241.
— σ de Weierstrass, 138.
— ζ de Weierstrass, 203.
— ζ de Riemann, 203 y 207 a 210.
Funciones algebraicas, 163 y 261 a 274.
— doblemente periódicas, 163, 217 y 225 a 241.
— elementales, 161.
— elípticas, 163 y 226 a 241.
— enteras, 162 y 165 a 192.
— — sin ceros, 166.
— meromorfas, 163 y 193 a 211.
— multiformes, 163 y 242 a 285.
— periódicas, 212.
— racionales, 162.
— simplemente periódicas, 163, 215 y 218 a 225.
— uniformes, 165 a 241.
Género de una superficie de Riemann, 258.
Hadamard-Cauchy (Teoría de), 86.
Heine-Borel (Teoría de), 32.
Hoja de una superficie de Riemann, 280.
Identidad en las funciones analíticas (Principio de), 107.
— en las series de potencias, (Principio de), 101.
Igualdad asintótica, 206.
Integral de Cauchy, 64.
— definida, 48.
— de Euler, 191.
— elíptica, 236.
Interpolación de factoriales, 191.
Intervalo, 18.
Invariantes de la función $\wp$, 233.
Jacobi, 227, 233 y 236.
Jordan (Curvas de), 34.
Koebe, 285.
Laplace (Ecuación diferencial de), 47.
Laurent (Desarrollo en serie de), 135 y sigs.
— (Desarrollos de), 269, 272, 282 y 283.

Limitación de Cauchy, 98.
Límite, 23.
— inferior, 22.
— superior, 23.
Límites principales, 23.
Liouville (Teoría de), 131.
— (Teorías de), 226 a 329.
Logaritmo, 125 a 127 y 242 a 260.
Longitud de un arco, 34.
Mascheroni (Constante de), 192.
Mittag-Leffler (Teorema y aplicaciones), 193 a 205.
Monógena (Función analítica), 275 a 278.
Morera (Teoría de), 83.
Multiformes (Funciones), 125 y sigs.
Número 11.
— de separación, 17.
— frontera, 17.
Orden de un polo, 142.
— de un punto $-a$. 110.
— de una función elíptica, 227.
Par de períodos primitivos, 217.
Paralelogramo fundamental, 189 y 226.
— periódico, 226.
Parte imaginaria, 38.
— principal de un desarrollo, 143.
— real, 38.
Período de una función, 212 a 218.
— primitivo, 215.
Plano cortado, 128.
— punteado, 263.
Poincaré, 285.
Polo, 142.
Principio de encaje, 18 y 30.
— de identidad en las funciones analíticas, 107.
— — en las series, 101.
— de la prolongación analítica, 115.
Pringsheim, 171 y 191.
Producto infinito, 171 a 179.
— de Wallis, 192 y 206.
Prolongación analítica, 113 y sigs., 242 y sigs.
— — por series potenciales, 119.
Proyección estereográfica, 13
Punto, 11.
— $-a$, 109.
— aislado, 31.
— cero, 109.
— de acumulación, 21.
— del infinito, 13.
— de ramificación, 127.
— frontera, 29.
— interior, 29.
— ordinario, 123.
— regular, 123.
— reticular, 14.
— singular, 102 y 123.
— — aislado, 142.
— — esencial, 142.
— — evitable, 142.
Puntos algebraicos, 271.
— congruentes, 218.
— críticos, 262.
— de ramificación algebraicos, 282.
— periódicos, 214.
— racionales, 276.
— reticulares, 188.
Radio de convergencia, 86.
Rama de una función, 280.
Ramificación (Puntos de), 127.
Recinto, 35.
— cerrado, 35.
— de definición, 37.
Rectificable, 34.
Red paralelogramática, 188 y 225.
Representación, 251.
— conforme, 251.
— estereográfica, 13.
— factorial de funciones, 166.
— — — enteras, 165 a 170.
— — de sen πz, 185 a 188.
— — de $\sigma(z)$, 188 a 190.
— — de $1 : \Gamma(z)$, 190 a 192.
Residuos, 150.
— teoría de los, 150 a 152.
Riemann-Cauchy (Ecuaciones diferenciales de), 46.
— (Superficies de), 242 a 260 y 278.
— (Teoría de), 149.
Segmento, 34.
— cerrado, 35.
Semiplano derecho, 12.
— izquierdo, 12.

Sentido matemático de un giro, 35.
Series absolutamente convergentes, 87.
— de funciones analíticas, 93 y sigs.
— de términos complejos, 85.
— dobles, 103.
— potenciales, 86 y sigs.
— uniformemente convergentes, 90 y 93.
Simplemente periódicas, funciones, 163, 215 y 218 a 225.
Singularidades algebraicas, 163 y 271.
— esenciales, 142.
— evitables, 142.
Sucesión de números, 23.
— de puntos, 23.
Sumandos generadores de convergencia, 200.
Superficies de Riemann, 242 a 260 y 278 a 281.
Superficies de $\sqrt{z}$, 247 a 250.
— de $\sqrt[p]{z}$, 250 a 251.
— de log z, 252 a 254.
— de $\sqrt{(z-a_1\ldots(z-a_k)}$, 256 a 259.
Taylor, 100, 104, 140.
Trayectorias, 33.
Unidad, círculo, 14.
Uniforme (Continuidad), 41.
— (Convergencia), 90.
— (Función), 44 y 125.
Uniformización, 235.
Valor principal, 127.
Wallis (Producto de), 192 y 206.
Weierstrass (Criterio de convergencia de), 93.
— teoría de Bolzano, 22.
— teoría de Cassorati, 133, 144 y 148.
— teoría de las series dobles, 103.
— teoría del producto y aplicaciones, 165 a 170 y 179 a 192.

Manuel Alberto del Castillo

PUBLICACIONES TÉCNICAS "LABOR"

Manual « Standard » del Ingeniero electricista. (Standard Handbook for Electrical Engineers), publicado bajo la dirección de ARCHER E. KNOWLTON. Dos tomos con 2890 páginas y 1800 figuras.

La Escuela del técnico electricista, publicado bajo la dirección del Prof. A. HOLZT, del Instituto Superior Técnico de Mittweida. 14 tomos, con un total de 5514 págs., 4617 figuras y 23 láminas.

I. Fundamentos de la Electrotecnia, 1.ª Parte. — II. Fundamentos de la Electrotecnia, 2.ª Parte. — III. Técnica de las medidas eléctricas.— IV. Teoría, cálculo y construcción de las máquinas de corriente continua. — V. Teoría, cálculo y construcción de las máquinas de corriente alterna sincrónicas. — VI. Teoría, cálculo y construcción de las máquinas de corriente alterna asincrónicas. — VII. Teoría, cálculo y construcción de transformadores. — VIII. Acumuladores. — IX. Técnica de la iluminación eléctrica. — X. Canalizaciones y material de alta y baja tensión y centrales. — XI. Fuerza motriz y tracción eléctrica. — XII. Técnica de la alta tensión. — XIII. Telecomunicación por conductores. — XIV. Alta frecuencia y Radiotecnia.

La Máquina dinamoeléctrica de corriente continua. ARNOLD-LA-COUR. Su teoría, experimentación, construcción, cálculo y funcionamiento. Dos tomos con 1550 págs., 1120 figs. y 17 láms. *(Reimpresión).*

Electrotecnia, por el Dr. A. THOMÄLEN, Profesor de la Escuela Técnica Superior de Karlsruhe. 556 páginas, 581 figuras. *(2.ª ed.).*

Electrotecnia general y aplicada a las máquinas. MOELLER-WOLFF. Dos tomos con un total de 832 páginas y 460 figuras.

Manual universal de la técnica mecánica, por ERIK OBERG y F. D. JONES. Versión española del famoso libro « Machinary's Handbook », mundialmente conocido bajo el apodo de « Biblia », que ha recibido por ser el más práctico entre todos los de su género. Dos tomos con 2128 págs., 1367 figs. y tablas numéricas.

Manual del taller mecánico y vocabulario de taller, por F. H. COLVIN y F. A. STANLEY. Versión española de la 8.ª edición norteamericana de la obra « American Machinist's Handbook ». Dos volúmenes con un total de 2125 págs., 1059 figs. y 976 tablas.

Manual del Constructor de Máquinas. Publicado bajo la dirección del Profesor H. DUBBEL, con la colaboración de numerosos especialistas. 2 tomos con un total de 2004 páginas, 3000 figuras y numerosas tablas. *(2.ª edición. 2.ª reimpresión).*

Formulario del técnico mecánico, KLINGELNBERG. 789 páginas y numerosas figuras y tablas numéricas. *(2.ª reimpresión).*

La Escuela del técnico mecánico, publicado bajo la dirección del Prof. A. Holzt, del Instituto Superior Técnico de Mittweida. Siete tomos y un atlas, con un total de 4330 páginas, 3736 figuras y 121 láminas. *(3.ª edición).*

I. Aritmética. Álgebra. Planimetría. Trigonometría. — II. Estereometría. Dibujo lineal e industrial. Proyecciones. Física. Cálculo diferencial e integral. — III. Mecánica. Resistencia de materiales. Grafostática.— IV. Elementos de máquinas. Máquinas elevadoras. Atlas de construcción. — V. Hidráulica. Motores hidráulicos. Bombas. — VI. Termodinámica. Motores de combustión interna. — VII. Calderas. Máquinas de vapor.

Problemas de Mecánica general y aplicada, por el Profesor F. Wittenbauer. Tres tomos, con un total de 1068 páginas, 896 problemas y sus soluciones y 1532 figuras. *(2.ª reimpresión).*

Lecciones sobre Teoría de la Mecánica y sus aplicaciones, por el Ing. M. Lucini. 682 páginas, 390 figuras y 160 ejercicios resueltos. *(2.ª edición).*

Mecánica industrial, por el Prof. I. Rubio Sanjuán. 679 páginas con 440 figuras y 682 ejercicios. *(2.ª edición).*

Mecánica para Ingenieros, por A. Morley. 311 páginas, 199 diagramas y numerosos ejemplos resueltos. *(2.ª reimpresión).*

Elementos de la teoría de momentos de inercia y cálculo de los mismos, por Isidoro Rubio Sanjuán. 282 páginas y 160 figuras. *(2.ª edición).*

Tratado elemental de Mecánica aplicada, por A. Morley. 447 páginas, 261 figuras y numerosos ejemplos resueltos. *(2.ª reimpresión).*

Mecánica general, por el Prof. I. Rubio Sanjuán. 495 páginas, 214 figuras y numerosos ejercicios y aplicaciones. *(2.ª edición).*

El motor Diesel moderno, por S. R. Adams. 374 páginas y 139 figuras. *(Reimpresión).*

Motores de combustión interna, publicado bajo la dirección del Prof. Dr. Hans List, VDI. Graz. XVI fascículos.

I. Introducción al estudio de la obra completa. Los materiales para el funcionamiento de los motores de combustión interna. Los gasógenos.— II. Termodinámica de los motores de combustión interna. — III. Transmisión del calor. — IV. 1.ª, 2.ª y 3.ª Parte : Renovación de la carga. — V. Los motores de gas. — VI. La formación de la mezcla en los motores de gasolina. — VII. La formación de la mezcla y la combustión en el motor Diesel. — VIII. 1.ª Parte : Fundamentos constructivos del motor de combustión interna. — VIII. 2.ª Parte : Dinámica de los motores de combustión interna. — IX. Distribución y regulación de los motores de combustión interna. — X. Mecanismo de los motores rápidos. — XI. Construcción de los motores rápidos de combustión interna para automóviles y automotores. — XII. Motores Diesel fijos y marinos. — XIII. Motores de aviación. XIV. Desgaste, coste de explotación y rentabilidad. — XV. Mecanismos accesorios del motor de combustión interna. — XVI. Turbina por gases.

Compendio de Resistencia de materiales, por el Prof. I. Rubio Sanjuán. Dos tomos con 989 páginas, 749 figuras, 8 láminas y numerosos ejercicios, tablas y proyectos. *(4.ª edición).*

Teoría de las Estructuras, por A. Morley. 748 páginas, 328 figuras, 4 láminas y numerosos ejemplos resueltos. *(2.ª edición. Reimpresión).*

Cristalografía, por A. K. Boldyrev, Prof. de la Escuela de Minas y Director del Instituto Federov de Leningrado. — 447 páginas, 354 figuras y 2 láminas en color.

La Escuela del Radiotécnico, bajo la dirección del Ingeniero de Telecomunicación Joaquín Sánchez Cordovés. 15 tomos en curso de publicación.

I. Fundamentos de Radioelectricidad. — II. Cine sonoro. Reproducción. — III. Megafonía y Electroacústica. — IV. Medidas en alta y baja frecuencia. — V. Radiotecnia general. — VI. Radiogoniometría.— VII. La Radio en la navegación aérea. — VIII. La Radio en la navegación marítima. — IX. Receptores de televisión. — X. Reparación y ajuste de receptores. — XI. Radiorreceptores. — XII. El Oscilógrafo de rayos catódicos y sus aplicaciones. — XIII. Radiotransmisores. Proyecto y construcción. — XIV. Fundamentos de ingeniería de televisión. — XV. Reparaciones y ajustes de receptores de televisión.

Diccionario de televisión, radar y antenas, en seis idiomas. Inglés-norteamericano, francés, español, italiano, holandés y alemán, por W. E. Clason. 768 páginas.

Bombas, por Matthiessen-Fuchslocher. 219 páginas y 236 figuras.

Abastecimiento de aguas, por Alfred Douglas Flinn. 900 páginas con 338 figuras, 312 tablas y 4 gráficos fuera de texto.

Termodinámica aplicada, por el Ing. M. Lucini. 277 páginas, 76 figuras, 7 tablas numéricas, 6 diagramas entrópicos y numerosos ejercicios resueltos. *(3.ª edición. Reimpresión).*

Tratado de Hidráulica, por el Prof. Ph. Forchmeimer. 644 páginas, 393 figuras y numerosos gráficos. *(Reimpresión).*

Problemas de Hidráulica aplicada, por el Dr. Ing. Otto Streck. 368 páginas, 133 figuras y 11 tablas. *(Reimpresión).*

Elementos de Hidráulica general y aplicada, con motores hidráulicos, por el Prof. I. Rubio Sanjuán. 533 páginas, 334 figuras, 288 ejercicios y aplicaciones y 67 tablas. *(4.ª edición en prensa).*

Turbomáquinas de vapor y de gas, por el Ing. M. Lucini. 487 páginas, 332 figuras y 4 láminas. *(3.ª edición en prensa).*

Bombas centrífugas. Su funcionamiento, construcción y cálculo, por el Ingeniero diplomado Quantz. 172 páginas y 149 figuras. *(4.ª reimpresión).*

Ampliación de matemáticas (para químicos, electricistas y mecánicos), por el Prof. I. RUBIO SANJUÁN. 731 páginas y 285 figuras. *(2.ª edición).*

Elementos de la teoría de momentos de inercia y cálculo de los mismos, por el Profesor I. RUBIO SANJUÁN. 282 páginas y 160 figuras. *(2.ª edición).*

Física general y experimental, por el Prof. ELIGIO PERUCCA. Dos tomos con un total de 2196 páginas y 1713 figuras. *(2.ª edición).*

Métodos de análisis químico industrial. BERL-LUNGE-D'ANS, con la colaboración de 117 eminentes especialistas. 5 tomos, en 8 volúmenes y 3 apéndices, con un total de 9457 páginas, 1998 figuras y numerosas tablas.

Métodos analíticos de Laboratorio lactológico, por JOSÉ M.ª ROSELL. Dos tomos con un total de 1616 páginas, 531 figuras y 5 láminas.

Tratado de Química física, por el Dr. JOHN EGGERT, Profesor de la Universidad de Berlín. 742 páginas y 168 figuras. *(2.ª edición).*

Prácticas de Química orgánica, por el Prof. F. W. HENLE. Traducción de la 3.ª edición alemana. 378 páginas y 55 figuras.

Elementos de Grafostática, por el Prof. I. RUBIO SANJUÁN. 267 páginas y 279 figuras. *(2.ª edición).*

Estática aplicada, por RUDOLF SALIGER. 1057 páginas y 775 figuras. *(3.ª edición. Reimpresión).*

Hormigón armado, por RUDOLF SALIGER. 826 páginas con 717 figuras y 140 tablas numéricas. *(2.ª edición).*

Construcción de carreteras, por ERWIN NEUMANN. 446 páginas, 330 figuras, 43 tablas y numerosos ejemplos numéricos.

Urbanismo: la técnica, por el Ing. Prof. GIORGIO RIGOTTI. 812 páginas y 546 esquemas ilustrativos del fichero personal del autor.

Cálculo de las Estructuras porticadas hiperestáticas, por el Prof. A. KLEINLOGEL. 4 tomos con 1152 páginas, 2988 figuras y 114 formas de estructuras.

I. Pórticos simples y marcos. — II. Pórticos de varios montantes. 1.ª Parte. — III. Pórticos de varios montantes. 2.ª Parte.— IV. Términos de carga.

Influencias de los agentes físicos, y químicos sobre las construcciones de hormigón y hormigón armado, por el Profesor A. KLEINLOGEL. Unas 300 páginas y 76 figuras. *(En prensa).*

Juntas de dilatación, por el Prof. A. KLEINLOGEL. *(En prep.).*

Cálculo de arcos, por el Ing. F. KÖGLER. 117 páginas y 29 figuras. *(2.ª reimpresión).*

TRABAJOS DE TALLER

Biblioteca práctica del Mecánico moderno

Volúmenes ilustrados con gráficos, grabados y proyecciones de máquinas

1. **Técnica de la medición y trazado,** por MAX KURREIN, Ing., y H. FRANGENHEIM, Ing. *(2.ª edición. 2.ª reimpresión).*
2. **Roseado y cálculo de las ruedas para roscar,** por OTTO MÜLLER, Ingeniero y GEORG KNAPPE, Ing. *(3.ª edición. Reimpresión).*
3. **Procedimientos generales de soldadura,** por los Ings. P. SCHIMPKE, T. RICKEN y W. BURSTYN. *(2.ª edición).*
4. **Taladrado, penetrado y escariado,** por J. DINNEBIER, Ing., y H. J. STOEWER, Ing. *(2.ª edición).*
5. **Tratamiento térmico del acero,** por los Ings. H. HERBERS y P. KLOSTERMANN. *(Agotado).*
6. **Forja de piezas varias,** por los Ings. W. DUESSING, A. STODT y B. PREUSS. *(2.ª edición).*
7. **Hierro colado, acero moldeado y fundición maleable,** por CHR. GILLES, Ingeniero, y Prof. Dr. E. KOTHNY. *(2.ª edición).*
8. **Modelos para la fundición y fabricación de placas para el moldeo mecánico,** por R. LÖWER y FR. y FE. BROBECK. *(2.ª edición).*
9. **Construcción de fresas y esmerilado,** por los Ings. BERTOLD BUXBAUM y PAUL ZIETING. *(2.ª edición en preparación).*
10. **Construcción de montajes para trabajos en serie,** por el Ing. F. GRÜNHAGEN. *(Reimpresión).*
11. **Los metales no férreos y su trabajo con prensa,** por los Ings. R. HINZMANN y A. PETER. *(2.ª edición).*
12. **La técnica del embutido de planchas. El trazado en la calderería,** por los Ings. W. SELLIN y A. DORL. *(2.ª reimpresión).*
13. **Los aceros de herramientas. Los metales duros en el taller,** por los Ingenieros H. HERBERS y F. W. LEIER.
14. **Brochado. Aserrado de los metales,** por los Ings. L. KNOLL, A. SCHATZ y H. HOLLAENDER.
15. **La forja con estampa,** por los Ings. P. H. SCHWEISSGUTH y H. KAESSBERG.
16. **Trabajos de cortador,** por los Ings. E. KRABBE, W. MEIER y W. SELLIN.
17. **Moldeado y preparación de tierras,** por los Ings. U. LOHSE y F. NAUMANN.
18. **Tornos automáticos y semiautomáticos,** por los Ings. K. SACHSE, PH. KELLE, E. GOTHE, A. KREIL, J. VAN HIMBERGEN, A. BLECKMANN y A. VASSMUTH. *(Reimpresión en preparación).*
19. **Soldadura eléctrica,** por los Ings. R. HESSE, W. FAHRENBACH y E. KLOSSE.
20. **Trabajos de cubilote y fundición sana,** por los Ings. J. MEHRTENS y E. KOTHNY.
21. **Recetas de taller. Máquinas herramientas de mano,** por los Ings. F. SPITZER y H. GRAF.
22. **Combustibles y aceites,** por los Ings. E. KOTHNY y K. KREKELER.
23. **El ABC de la construcción de modelos y máquinas de trabajo de la madera,** por los Ings. H. WICHMANN y E. KADLEC.
24. **Trazado y cálculo de las ruedas dentadas,** por el Ing. H. TRIER. *(Reimp).*
25. **Cálculo de los tiempos de fabricación para máquinas herramientas,** por JOSÉ M.ª PEDRÓS.

NUEVOS VOLÚMENES EN PREPARACIÓN